DEFINITION EINES LOGARITHMUS

Der Logarithmus dient zur Berechnung eines variablen Ausdrucks im Exponenten.

Es gilt: $$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a}}$$

<u>10er-Logarithmus:</u>
Ein Logarithmus ohne Angabe einer Basis ist immer zur Basis 10. $\log x = \log_{10} x$

Beispiel: $\log 10.000 = \log_{10} 10^4 = 4$

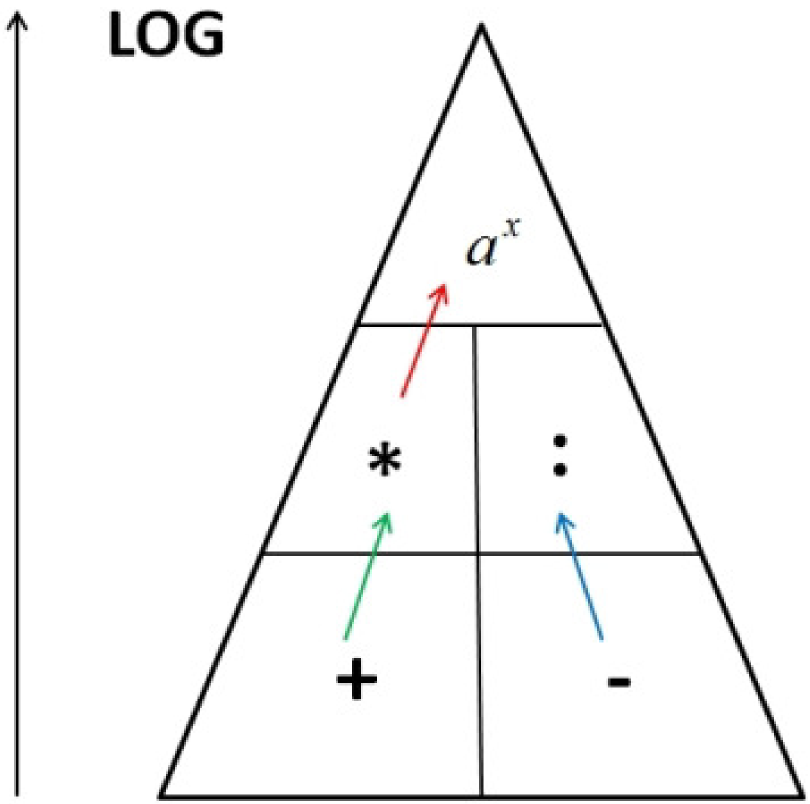
<u>Logarithmus naturalis:</u>
Der Logarithmus zur Basis *e* ist der natürliche Logarithmus. $\ln x = \log_e x$

Beispiel: $\ln 42 = \log_e 42 = 3{,}737$

<u>Logarithmus dualis:</u>
Ein Logarithmus zur Basis 2 nennt man dualis. $ld(x) = \log_2 x$

Beispiel: $ld(32) = \log_2 2^5 = 5$

LOGARITHMUS-GESETZE



$$3 \cdot \log 4 = \log 4^3 = \log 64$$

$$\log 2 + \log 3 = \log 2 \cdot 3 = \log 6$$

$$\log 8 - \log 2 = \log \frac{8}{2} = \log 4$$

$$(\ln \heartsuit)' = \frac{1}{\heartsuit} \cdot \heartsuit'$$

$$\heartsuit^{n} = n \cdot \heartsuit^{n-1} \cdot \heartsuit'$$

$$\left((2x-3)^4\right)' = 4 \cdot (2x-3)^3 \cdot (2x-3)' = 8 \cdot (2x-3)^3$$

$$\left(\sqrt[3]{4-2x}\right)' = \left[(4-2x)^{1/3}\right]' = \tfrac{1}{3}(4-2x)^{-2/3} \cdot (-2)$$

$$\left(8 \cdot \ln \sqrt[4]{5-4x}\right)' = 8 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{5-4x}} \cdot \left(\sqrt[4]{5-4x}\right)' \cdot (5-4x)'$$

$$\left[8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln(5-4x)\right]' = 2 \cdot \frac{1}{5-4x} \cdot (-4)$$

OPERATION UND GEGENOPERATION

Die zu einem Logarithmusausdruck zugehörige Gegenoperation ist stets ein Exponentialoperator, wodurch sich beide neutralisieren.
Die Zusammenhänge ergeben sich wie folgt:

$$\boxed{\log 10^{\Psi} = 10^{\log \Psi} = \Psi} \; \boxed{\ln e^{\Omega} = e^{\ln \Omega} = \Omega} \; \boxed{ld 2^{\Theta} = 2^{ld \Theta} = \Theta}$$

Aufgrund dieser Vereinfachungen, muss die zugehörige Basis bzw. der Exponent im ersten Schritt mittels exponentieller/ logarithmischer Gesetze passend umgeformt werden.

Beispiel:

$$\log \frac{1}{1000} - 4 \cdot \ln \sqrt{e} + \frac{1}{2} \cdot ld 16 + 0{,}1^{\log 0{,}25} + \left(\frac{1}{e^2}\right)^{\ln \frac{1}{3}} - 8^{ld 3}$$

$$\log 10^{-3} - 4 \cdot \ln e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot ld 2^4 + 10^{(-1) \cdot \log \frac{1}{4}} + e^{(-2) \cdot \ln \frac{1}{3}} - 2^{3 \cdot ld 3}$$

$$-3 - 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 3^3 = -3 - 2 + 2 + 4 + 9 - 27 = -17$$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $\log\frac{1}{100}-\sqrt{e}^{\ln 4}+4^{ld3}-2ld0{,}25$

2) $100^{\log 3}-\ln\frac{1}{e^2}+0{,}5ld16-e^{-3\ln\frac{1}{2}}$

3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{ld2}-6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}+\frac{1}{4}ld64-\frac{1}{2}\log\frac{1}{1000}+\sqrt[3]{e}^{\ln 27}$

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\ln\frac{1}{9}}+100^{\log\frac{1}{2^{-2}}}-16^{\frac{1}{2}ld4}+2\log 0{,}001-3\ln\frac{1}{e^3}+\frac{1}{4}ld\frac{1}{256}$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $3 \cdot \log(x-y) + \log(x+y) - \frac{1}{2}\log(x-y)^4$

3) $\log \sqrt[5]{\frac{x^3 \cdot y^2}{3 \cdot (x+y^2)}}$

2) $2\ln 2x - 3\ln 2 + 4\ln\sqrt{x} + 2\ln\frac{4}{x^2}$

4) $\ln\left(\frac{2 \cdot \sqrt{a-2b}}{c^2 \cdot \sqrt[4]{d}}\right)^3$

5) $16^{ld\sqrt{3}} + 1.000^{\log 3} - \sqrt[4]{e}^{\,2\ln 25} - 2\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2 - \log\frac{1}{100} + 3ld\,\frac{1}{8}$

6) $\left(e^4\right)^{\ln 2} + 0{,}1ld1024 - \log\sqrt{10.000} + 0{,}01^{\log\frac{1}{3}} - \left(\frac{2}{16}\right)^{-ld3} + 6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

1) $3 \cdot \log(x-y) + \log(x+y) - \frac{1}{2}\log(x-y)^4$

$\log(x-y)^3 + \log(x+y) - \log(x-y)^2$

$$\log \frac{(x-y)^3 \cdot (x+y)}{(x-y)^2} = \log[(x-y)(x+y)] = \log(x^2-y^2)$$

2) $2\ln 2x - 3\ln 2 + 4\ln\sqrt{x} + 2\ln \frac{4}{x^2}$

$\ln 4x^2 - \ln 8 + \ln x^2 + \ln \frac{16}{x^4}$

$$\ln \frac{4x^2 \cdot x^2 \cdot \frac{16}{x^4}}{8} = \ln \frac{4x^4 \cdot 16}{8x^4} = \ln 8$$

5) $2^{4\cdot ld\sqrt{3}} + 10^{3\cdot\log 3} - e^{\frac{1}{4}\cdot 2\ln 25} - \ln(e^{-2})^2 - \log 10^{-2} + ld(2^{-3})^3$

$2^{ld\,9} + 10^{\log 27} - e^{\ln 5} - \ln e^{-4} - \log 10^{-2} + ld\,2^{-9}$

$9 + 27 - 5 + 4 + 2 - 9 = \cancel{36} \; 28$

6) $e^{\ln 16} + ld\,2 - \log 10^2 + 10^{\log(1/3)^{-2}} - 2^{ld\,3^3} + \ln(e^{-1/3})^6$

$16 + \cancel{1}\,2 - 2 + 9 - 27 - 2 = -5$

I.1) $3\log x - 4\log{}^2\!/\!x + \frac{1}{3}\log(x^2)^6 = \frac{2}{3}\log 27 + \frac{1}{2}\log x^4 - 2\log 6$

$\log x^3 - \log {}^{16}\!/\!_{x^4} - \log x^4 = \log 9 + \log x^2 - \log 36$

$\log\frac{x^3}{16/x^4 \cdot x^4} = \log\frac{9\,x^2}{36} \quad \uparrow 10^x$

$\frac{x^3}{16} = \frac{x^2}{4} \quad |:x^2\cdot 16 \qquad x = 4$

MATHEMATIK

03.12.2012

WIEDERHOLUNG

Steht die Variable im Exponenten, so handelt es sich um eine ____________. Möchte man nun nach dem Ausdruck im Exponenten auflösen, so nutzt man den ____________.

Je nachdem wie die vorhandene ________ definiert ist unterscheidet man:

- LD: ____________ (Basis ist zwei)
- LN: Logarithmus naturalis (____________)
- ___: 10er Logaithmus

Wenn eine andere Basis vorhanden ist, so nutzt man den ____________ und setzt die benötigte Basis direkt ein.

Die Gesetze der ____________ kann man aus der Hierarchie-Pyramide nach Schreiber entwickeln. Dabei ist darauf zu achten, dass man sich von ____________ bewegt.

Wenn z.B. ein Produkt aus Zahl und Logarithmus vorhanden ist, so wandert der ________ vor dem Logarithmus in den __________ des Terms der hinter dem Logarithmus steht.

Treffen bei einem Term der ____________ und die zugehörige Exponentialfunktion mit gleicher _______ aufeinander, so eliminieren sich die Operation und Gegenoperation.

Diese Tatsache nutzt man, in dem man die ________ konvertiert. Dies geschieht im Wesentlichen dadurch, in dem Sie zuerst ____________ und danach die Logarithmengesetze anwenden.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wie lösen wir eine Logarithmengleichung?
- ✓ Welche Eigenschaften hat eine Logarithmusfunktion?
- ✓ Wie geht die quadratische Ergänzung?
- ✓ Verallgemeinerung der quadratischen Ergänzung (p-q-Formel).
- ✓ Wie funktioniert der Satz von Vieta?
- ✓ Eigenschaften einer quadratischen Funktion.
- ✓ Substitutionsverfahren bei Bi-Quadratische Gleichungen.
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.