Klausur zum Sommersemester 2011

Name: ____________________________ Matrikel-Nr: ________________

EMail: ____ (optionale Schnell-Korrektur)

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Punkte	9	9	12	6	12	12

Als Hilfsmittel sind die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten Unterlagen (Skripte und Musteraufgaben inkl. Lösungen) sowie handschriftliche Notizen und ein einfacher, nicht programmierbarer Taschenrechner zugelassen.
Andere elektronischen Hilfsmittel und Bücher in jeglicher Form sind nicht gestattet.

Runden Sie Ihre Ergebnisse auf 2 Stellen nach dem Komma.

1. Geben Sie für die genannten Merkmale die mögliche Gesamtmasse und Einheit sowie deren Identifikationskriterien an.
   Welcher Skalentyp mit welchen möglichen Transformationen liegt je Merkmal vor?
   Handelt es sich um Bestands- oder Bewegungsmasse? (Begründung!)

   a) Bankleitzahl einer hessischen Filiale eines Kreditinstituts.
   b) Tägliche Anzahl neuer Anfragen von (neuen) Freunden auf facebook.
   c) Monatliche, eigene Handykosten (in EURO) für den SMS-Bereich.

2. Im Frankfurter Palmengarten wird das monatliche Wachstumsverhalten (in mm) einer Pflanze untersucht, wobei sich die folgenden Daten ergeben haben:

Monat	Jan	Feb	Mrz	Apr	Mai	Juni	Juli	Aug	Sept	Okt	Nov	Dez
2009	10	12	10	8	10	12	15	15	12	10	8	8

   a) Berechnen Sie die relativen und absoluten Häufigkeiten.
   b) Bestimmen Sie den monatlichen Wachstumsdurchschnitt und den Median.
   c) Wie groß ist die Standardabweichung des Wachstumsverhaltens der Pflanze?
   d) Berechnen Sie die monatlichen Wachstumsfaktoren und für diese einen geeigneten Mittelwert und begründen Sie Ihre Wahl.

3. Zum Testen einer Maschine untersuchte man die produzierte Stückzahl in einer zufällig gestoppten Zeit (in Minuten). Dabei ergab sich die folgende Urliste:

Zeit (x)	2	4	5	7	4	8	10	5	5	8
Stückzahl (y)	5	9	9	14	7	19	23	11	10	21

   a) Berechnen Sie die Regressionsgerade „Stückzahl in Abhängigkeit der Zeit“.
   b) Geben Sie COV(X,Y)-Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten (Pearson) an.

4. Ein Kapital von 12.000 Euro wurde am 31.08.2000 auf ein Konto eingezahlt und mit einem Zinssatz von 6% verzinst.

   a) Welches Endkapital ist heute (13.07.2011) mittels Variante „morgen“ unter Verwendung der Deutschen Methode vorhanden?
   b) Wie hoch müsste eine nachschüssige konstante Rentenzahlung sein, um nach 12 Jahren und 5% Zinsen auf den gleichen Endbetrag zu kommen?
   c) Wie lang muss eine vorschüssige Rentenzahlung von 2.347,82 Euro bei einem Zinssatz von 8% erfolgen, um auf den gleichen Endbetrag zu kommen?

5. Eine Büroeinrichtung hat einen Neupreis von 125.000 Euro.
   Diese soll innerhalb von 15 Jahren auf einen Restwert von 10.000 geometrisch degressiv abgeschrieben werden.

   a) Berechnen Sie den zugrunde liegenden Abschreibungsprozentsatz.
   b) Erstellen Sie den Abschreibungsplan für die ersten 5 Jahre.
   c) Nach welcher Zeit beträgt der Restwert noch 23.199,42 Euro?

6. Ein Darlehen von 15.000 Euro soll in 3 Jahren zurückgezahlt werden.
   Der Zinssatz der Bank beträgt 8% und die Zahlungen sollen vierteljährlich erfolgen.

   a) Wie groß ist die jährliche Annuität?
   b) Bestimmen Sie die unterjährigen, nachschüssigen Zahlungen.
   c) Erstellen Sie den Tilgungsplan der ersten 2 Jahre.

Auch Sie könnten sich den Pokal holen!
Machen Sie es besser!!!!!

Musterlösung Klausur Finanzmathematik und Statistik 2011

1) a)

Masse:	BLZ aller Banken	IK-räumlich:	Hessen
Einheit:	BLZ einer Bank	IK-sachlich:	BLZ
Skala:	Nominalskala (eineindeutig)	IK-zeitlich:	2011

Bestandsmasse, da die BLZ unverändert ist und keinerlei Veränderung bewirkt.

b)

Masse:	Freunde auf facebook	IK-räumlich:	Internet
Einheit:	ein neuer Freund	IK-sachlich:	Freund auf facebook
Skala:	Verhältnisskala (linear)	IK-zeitlich:	pro Tag

Bewegungsmasse, da sie die existierende Anzahl an Freunden verändert.

c)

Masse:	Handykosten	IK-räumlich:	Eigenes Handy
Einheit:	SMS-Kosten	IK-sachlich:	SMS-Kosten
Skala:	Absolutskala (identisch)	IK-zeitlich:	pro Monat

Bewegungsmasse, da sie die monatlichen Gesamtkosten beeinflussen.

2) a)

Wachstum (mm)	**8**	**10**	**12**	**15**
h(x)	3	4	3	2
f(x)	0,25	0,33	0,25	0,17

b) Liste sortiert: 8, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 12, 12, 12, 15, 15

Median: $\overline{X_Z} = \frac{1}{2} \cdot (x_6 + x_7) = \frac{1}{2} \cdot (10 + 10) = 10$

Mittelwert: $\mu = \frac{1}{12} \cdot \sum x_i \cdot h(x_i) = \frac{1}{12} \cdot (3 \cdot 8 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 15) = \frac{130}{12} = 10{,}83$

c) Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{\frac{1}{12} * 1.474 - \left(\frac{130}{12}\right)^2} = \sqrt{\frac{788}{144}} = 2{,}34$

d) Wachstumsfaktoren:

Monat	Jan	Feb	Mrz	Apr	Mai	Juni	Juli	Aug	Sept	Okt	Nov	Dez
2009	10	12	10	8	10	12	15	15	12	10	8	8
Wachstumsfaktor	1,00	1,20	0,83	0,80	1,25	1,20	1,25	1,00	0,80	0,83	0,80	1,00

Geometrisches Mittel:

$$\overline{X_G} = \sqrt[12]{1{,}00 \cdot 1{,}20 \cdot 0{,}83 \cdot 0{,}80 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}00 \cdot 0{,}80 \cdot 0{,}83 \cdot 0{,}80 \cdot 1{,}00}$$

$$\overline{X_G} = \sqrt[12]{0{,}80} = 0{,}98$$

3) Arbeitstabelle:

x	**2**	**4**	**5**	**7**	**4**	**8**	**10**	**5**	**5**	**8**	**58**
y	**5**	**9**	**9**	**14**	**7**	**19**	**23**	**11**	**10**	**21**	**128**
x²	4	16	25	49	16	64	100	25	25	64	**388**
y²	25	81	81	196	49	361	529	121	100	441	**1984**
x*y	10	36	45	98	28	152	230	55	50	168	**872**
x-µ(x)	-3,80	-1,80	-0,80	1,20	-1,80	2,20	4,20	-0,80	-0,80	2,20	
y-µ(y)	-7,80	-3,80	-3,80	1,20	-5,80	6,20	10,20	-1,80	-2,80	8,20	
Produkt	29,64	6,84	3,04	1,44	10,44	13,64	42,84	1,44	2,24	18,04	**129,6**

a) $a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$; $b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

$a = \frac{10\cdot 872 - 58\cdot 128}{10\cdot 388 - 58^2} = 2{,}51$; $b = \frac{388\cdot 128 - 58\cdot 872}{10\cdot 388 - 58^2} = -1{,}77$

Regressionsgerade: $y = 2{,}51 \cdot x - 1{,}77$

b) $COV(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)\cdot(y_i - \mu_y) = \frac{1}{10}\cdot 129{,}6 = 12{,}96$

$$r_{xy} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{12{,}96}{\left(\frac{1}{10}\cdot 388 - 5{,}8^2\right)\cdot\left(\frac{1}{10}\cdot 1984 - 12{,}8^2\right)} = 0{,}97$$

4) a) Sparbuchmethode: $K_{x,t_0} = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t_1}{360}\right)\cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i\cdot\frac{t_2}{360}\right)$

Gegeben: $K_0 = 12.000$ $i = 6\% = 0{,}06$
$t_1 = 120\ Tage$ $n = 10\ Jahre$ $t_2 = 193\ Tage$

Endkapital: $K_n = 12.000 \cdot \left(1 + 0{,}06\cdot\frac{120}{360}\right)\cdot(1+0{,}06)^{10}\cdot\left(1+0{,}06\cdot\frac{193}{360}\right)$
$K_n = 22.625{,}07$

b) Rentenrechnung: $R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$; $p = 5\% = 0{,}05$ $n = 12\ Jahre$

$r = R_n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 22.625{,}07 \cdot \frac{0{,}05}{1{,}05^{12} - 1} = 1.421{,}43$

c) Rentenrechnung: $R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$; $p = 8\% = 0{,}08$ $r = 2.347{,}82$

$$n = \frac{log\left[\frac{R_n}{r\cdot q}\cdot(q-1)+1\right]}{\log(q)} = \frac{log\left[\frac{22.625{,}07}{2.347{,}82\cdot 1{,}08}\cdot 0{,}08+1\right]}{\log(1{,}08)} = \frac{\log(1{,}71)}{\log(1{,}08)} \cong 7\ Jahre$$

5) a) Abschreibungssatz: $p = \left[1 - \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}\right] \cdot 100 = \left[1 - \sqrt[15]{\frac{10.000}{125.000}}\right] \cdot 100 = 15{,}5\%$

b) Abschreibungsplan:

Jahr	Kapital	Abschreibung	Prozent	Prozent(relativ)
0	125.000,00	19.375,00	15,50%	15,50%
1	105.625,00	16.371,88	15,50%	13,10%
2	89.253,13	13.834,23	15,50%	11,07%
3	75.418,89	11.689,93	15,50%	9,35%
4	63.728,96	9.877,99	15,50%	7,90%
5	53.850,97	8.346,90	15,50%	6,68%

c) Restwert: $K_n = K_0 \cdot (1-p)^n$

$$n = \frac{log\left[\frac{K_n}{K_0}\right]}{log(1-p)} = \frac{log\left[\frac{23.199{,}42}{125.000}\right]}{\log(0{,}845)} \cong 10\,Jahre$$

6) a) Jahres-Annuität: $A = S \cdot \frac{q^{n+1}-q^n}{q^n-1} = 15.000 \cdot \frac{1{,}08^4-1{,}08^3}{1{,}08^3-1} = 5.820{,}50$

b) Annuität (Viertel): a$= \frac{A}{m+\frac{i\cdot(m-1)}{2}} = \frac{5.820{,}50}{4+\frac{0{,}08\cdot 3}{2}} = 1.412{,}74$

c) konformer Jahreszins: $Z_k = i \cdot RS_k - a \cdot \frac{i\cdot(m-1)}{2} = 0{,}08 \cdot RS_k - 1.412{,}74 \cdot \frac{0{,}08\cdot 3}{2}$

$$Z_k = 0{,}08 \cdot RS_k - 169{,}53$$

Tilgungsplan (2 Jahre):

k	m	RS	Z	T	A
1	1	15.000,00		1.412,74	1.412,74
	2	13.587,26		1.412,74	1.412,74
	3	12.174,52		1.412,74	1.412,74
	4	11.792,25	1.030,47	382,27	1.412,74
2	5	10.379,51		1.412,74	1.412,74
	6	8.966,77		1.412,74	1.412,74
	7	7.554,03		1.412,74	1.412,74
	8	6.802,12	660,83	751,91	1.412,74