MATHEMATIK

18.07.2019

WIEDERHOLUNG

Diese Lücken sollten nicht auch bei Ihnen vorhanden sein:

Wird im Bereich der Rentenrechnung die zugehörige ________ zu Beginn eines Jahres / einer Zeitperiode eingezahlt, so spricht man von ________.
Durch diese Variante wird das eingesetzte Kapital jeweils ein Jahr zusätzlich _______, so dass man entweder die vorhandene Endwertformel durch den _________________q ergänzt oder nur die Rentenrate____________ verzinst und anschließend die Formel für den ________________Rentenendwert benutzen kann.
Da der ________einer Einmalzahlung entspricht, um ein gewünschtes Endkapital aufzubauen ist die Formel __________, ob der Endwert vor- oder nachschüssig entsteht.
Sofern es sich um unterjährige Zahlungen handelt, wird im ersten Berechnungsschritt eine sogenannte jährliche konforme _______________berechnet, die dann zur Bestimmung des ________mit den bisherigen Formeln genutzt werden kann.
Dies geschieht analog zu den unterjährigen ____________, d.h. je nachdem in welcher Form die Zahlungen laufen, wird eine zusätzliche Variable (__) benutzt.
Es wird auch bei unterjährigen Zahlungen zwischen ____- und __________unterschieden.
Es handelt sich um eine ______Rente, wenn jährlich nur die entstehenden Zinsen ausgezahlt werden, d.h. das entsprechende Startkapital niemals ___________wird.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was versteht man unter der Tilgungsrechnung?
- ✓ Welche Variablen benötigen wir für die Berechnung?
- ✓ Welche Formen des Tilgungsanteils existieren?
- ✓ Was ist eine Annuität?
- ✓ Welche Formen der Annuitätentilgung gibt es?
- ✓ Wie erstellt man einen Tilgungsplan?
- ✓ Wie wirkt sich eine unterjährige Tilgung aus?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

Aufgaben Nachschüssige Renten:

1) Der Barwert von 10.000 (Laufzeit 8 Jahre, 5% Zinsen) soll in eine vorschüssige Rente umgewandelt werden
Wie hoch sind die jährlichen Rentenraten?

2) Eine jährliche Rentenrate von 15.000 Euro erbringt nach seiner Laufzeit bei einer vorschüssigen Verzinsung von 4% einen Endwert von 103.474,42 Euro.
Wie lange wurde diese Rentenzahlung getätigt?

3) Fred bekommt alle 4 Monate 500,00 Euro (Laufzeit 10 Jahre).
Diese werden auf seiner Bank vorschüssig mit 5% verzinst.
Das angesparte Geld wird mittels eines Rentenvertags (nachschüssig) angelegt.
Welchen jährlichen Betrag kann er sich dann nach weiteren 5 Jahren für die kommenden 5 Jahre jährlich auszahlen?

TILGUNGSRECHNUNG:

DEFINITION:
Unter der Tilgungsrechnung versteht man einen Zahlungsstrom, der zur Rückführung eines geliehen Betrags (Schuld) dient.
Die mathematischen Grundlagen werden von der Rentenrechnung geliefert, wobei innerhalb Tilgungsrechnung eine Schuld abgebaut und mittels der Rentenrechnung ein Endwert aufgebaut wird.

Für die Rate gilt:

Die Rückzahlungen können innerhalb eines Zinszeitraums (Jahr) zu Beginn (**vorschüssig**), am Ende (**nachschüssig**) oder auch in mehreren **Tilgungsperioden** erfolgen.

Der enthaltene Tilgungsanteil kann folgende Gestalt besitzen:

- ✓ konstant: Tilgung bleibt konstant
- ✓ unregelmäßig: Tilgung ist variabel
- ✓ regelmäßig: Tilgung steigt kontinuierlich

Symbole / Variablen der Tilgungsrechnung:

T_k	Tilgungsrate (im Jahr k)	Z_k	Zinszahlung (im Jahr k)
A_k	Annuität (im Jahr k)		
RS_k	Schuldenstand (Begin)	S_k	Schuldenstand (Ende)
n	Laufzeit des Kredits		

Am Ende der Laufzeit kann die Schuld entweder komplett getilgt sein $S_n = RS_{n+1} = 0$ bzw. noch definierter Rest existieren.

RATENTILGUNG (JÄHRLICH):

Im Fall der Ratentilgung sind alle Tilgungsraten gleich groß, d.h.

$$T_1 = T_2 = \cdots = T_n = T$$

Sofern der Kredit nach n Jahren komplett getilgt sein soll, muss die Summe aller Tilgungen die Schuld ergeben.

$$\sum_{k=1}^{n} T_k = S \;\; und \; T_k = T = \frac{S}{n}; \;\; mit \; k = 1, \dots, n$$

Durch die Festlegung der Tilgungsraten ergibt sich die Annuität als

$$A_k = \frac{S}{n} + \frac{S}{n} \cdot (n - k + 1) \cdot i = \frac{S}{n} \cdot [1 + (n - k + 1) \cdot i]$$

Beispiel:

Eine Summe von 36.000 Euro wird zu Jahresbeginn zu 10% ausgeliehen. Sie soll in 3 Jahren durch nachschüssige Ratentilgung zurückbezahlt werden.

$$1.\text{Jahr:} \quad A_1 = \frac{36.000}{3} + \frac{36.000}{3} \cdot (3 - 1 + 1) \cdot 0{,}1 = 15.600$$

$$2.\text{Jahr:} \quad A_2 = \frac{36.000}{3} + \frac{36.000}{3} \cdot (3 - 2 + 1) \cdot 0{,}1 = 14.400$$

$$3.\text{Jahr:} \quad A_3 = \frac{36.000}{3} + \frac{36.000}{3} \cdot (3 - 3 + 1) \cdot 0{,}1 = 13.200$$

Tilgungsplan:

k	RS_k	Z_k	T_k	A_k	S_k
1	36.000	3.600	12.000	15.600	24.000
2	24.000	2.400	12.000	14.400	12.000
3	12.000	1.200	12.000	13.200	0
4	0				

AUFGABEN RATENTILGUNG :

Eine Schuld von 120.000 Euro soll bei jährlichen Verzinsungen von 9,5% in 6 Jahren durch jährlich gleich hohe Tilgungsraten getilgt werden.

a) Erstellen Sie den Tilgungsplan.

b) Wie ändern sich die Annuitäten des 5. und 6. Jahres, wenn sich der Zinssatz auf 10,5 % erhöht?

zu a) Tilgungsplan:

k	RS_k	Z_k	T_k	A_k	S_k
1	120.000	11.400	20.000	31.400	100.000
2	100.000	9.500	20.000	29.500	80.000
3	80.000	7.600	20.000	27.600	60.000
4	60.000	5.700	20.000	25.700	40.000
5	40.000	3.800	20.000	23.800	20.000
6	20.000	1.900	20.000	21.900	0

Beispielberechnung für das 4. Jahr:

$$Z_4 = RS_4 \cdot 9{,}5\% = S_3 \cdot 9{,}5\% = 60.000 \cdot 0.095 = 5.700$$

$$T_4 = \frac{S}{n} = \frac{120.000}{6} = 20.000$$

$$A_4 = Z_4 + T_4 = 5.700 + 20.000 = 25.700$$

zu b)

5.Jahr: $A_5 = \frac{120.000}{6} + \frac{120.000}{6} \cdot (6 - 5 + 1) \cdot 0{,}105 = 24.200$

6.Jahr: $A_6 = \frac{120.000}{6} + \frac{120.000}{6} \cdot (6 - 6 + 1) \cdot 0{,}105 = 22.100$

ANNUITÄTENTILGUNG :

Wie anhand der Beispiele der Tilgungsrechnungen zu erkennen ist, sind die Annuitäten und damit auch die Belastung für den Schuldner in den 1. Jahren besonders hoch. Diese nimmt dann durch die immer geringer werdende Restschuld kontinuierlich ab.

Aus diesem Grund wird in der Annuitätenrechnung die zu zahlende jährliche Annuität konstant gewählt.

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$$

Es werden dadurch zwei verschiedene Varianten definiert:

EXAKTE ANNUITÄTEN:

Die Annuitäten werden mittels der Formel zur Berechnung einer jährlichen nachschüssigen Rente bestimmt, wobei die Rate der Annuität und der Rentenbarwert der zu tilgenden Schuld entspricht.

$$A = S \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1}$$

Die Zinsen beziehen sich stets auf die Restschuld und es gilt:

$$Z_k = i \cdot RS_k = A - T_k$$

Für den Tilgungsbetrag muss der zugehörige Startwert, d.h. die Tilgung im ersten Jahr berechnet werden.

$$T_1 = S \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

Alle folgenden Tilgungen berechnen sich mittels Zinseszinsformel basierend auf der Anfangstilgung:

$$T_k = T_1 \cdot q^{k-1} \text{ und damit auch } Z_k = A - T_1 \cdot q^{k-1}$$

Beispiel:

Eine Summe von 36.000 Euro wird zu Jahresbeginn zu 10% ausgeliehen.
Sie soll in 3 Jahren durch nachschüssige Annuitätentilgung mit exakten Annuitäten zurückgezahlt werden.

$$A = S \cdot \frac{q^{n+1} - q^n}{q^n - 1} = 36.000 \cdot \frac{1{,}1^4 - 1{,}1^3}{1{,}1^3 - 1} = 14.476{,}13$$

$$T_1 = S \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} = 36.000 \cdot \frac{1{,}1 - 1}{1{,}1^3 - 1} = 10.876{,}13$$

$$T_2 = T_1 \cdot q^{k-1} = 10.876{,}13 - 1{,}1^1 = 11.963{,}74$$

$$T_3 = T_1 \cdot q^{k-1} = 11.963{,}74 - 1{,}1^2 = 13.160{,}12$$

Tilgungsplan:

k	RS_k	Z_k	T_k	A_k	S_k
1	36.000	3.600	10.876,13	14.476,13	25.123,87
2	25.123,87	2.512,39	11.963,74	14.476,13	13.160,13
3	13.160,13	1.316,01	13.160,12	14.476,13	0,01
4	0,01				

Prozentannuitäten:

Im Fall der exakten Annuitäten kommt es für gewöhnlich zu sehr krummen Beträgen und dadurch bedingt zu einer Restschuld am Ende der Laufzeit.
Mittels der Prozentannuitäten können die krummen Beträge durch einen festen Prozentwert des Schuldbetrages vermieden werden.
Den Rest der im letzten Jahr noch vorhanden ist, wird mittels der Schlusszahlung getilgt.

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = A;\ A_n \leq A$$

Statt der Laufzeit *n* wird dann die Annuität *A* in der Form

$$A = (i + i^*) \cdot S = p^* \cdot S$$

angegeben, wobei den Nominalzinssatz des Kredits und den Tilgungssatz beschreibt.

Die Tilgung beträgt p% zuzüglich ersparter Zinsen.

Es gelten folgende Zusammenhänge:

Annuitäten: $A_n = RS_n \cdot q$

Tilgung: $T_k = T_1 \cdot q^{k-1} = i^* \cdot S \cdot q^{n-1}$

Zinsen: $Z_k = A - T_k = (i + i^*) \cdot S - i^* \cdot S \cdot q^{n-1}$

Beispiel:
Im obigen Beispiel mit S=36.000 und p=10% wird ein Prozentsatz $p^* = 30\%$ vereinbart. Die Laufzeit wird nicht angegeben.

k	RS_k	Z_k	T_k	A_k	S_k
1	36.000	3.600	10.800	14.400	25.200
2	25.200	2.520	11.880	14.400	13.320
3	13.320	1.332	13.068	14.400	252
4	252	25,20	252	277,20	0

AUFGABEN ANNUITÄTENTILGUNG :

Ein Darlehen von 240.000 Euro soll bei 9% Zins p.a. durch gleiche jährlich nachschüssige Annuitäten von 26.400 Euro getilgt werden (plus einer Abschlusszahlung im letzten Jahr).

a) Wie hoch ist die erste Tilgungsrate?
b) Wie viele Jahre dauert die Tilgung?
c) Erstellen Sie den Tilgungsplan für die ersten 4 Jahre.
d) Wie hoch ist die Restschuld zu Beginn des 10. Bzw. 20. Jahres?
e) Wie hoch ist die Abschlusszahlung, wenn sie ein Jahr nach der letzten vollen Annuität geleistet wird?

zu a) $T_1 = A - Z_1 = 26.400 - 240.000 \cdot 0{,}09 = 4.800$

zu b) $n = \frac{\ln(A) - \ln(T_1)}{\ln(q)} = \frac{\ln(26.400) - \ln(4.800)}{\ln(1{,}09)} = 19{,}78 \approx 20\,Jahre$

zu c) $Z_k = i \cdot RS_k = A - T_k$ $\qquad T_k = T_1 \cdot q^{k-1}$

$$T_{10} = 4.800 \cdot 1{,}09^9 = 10.425{,}09$$

$$RS_{10} = \frac{26.400 - 10.425{,}09}{0{,}09} = 177.499{,}03$$

$$T_{20} = 4.800 \cdot 1{,}09^{19} = 24.679{,}97$$

$$RS_{20} = \frac{26.400 - 24.679{,}97}{0{,}09} = 19.111{,}40$$

zu d) Abschlusszahlung:

$$S_{20} = RS_{20} \cdot q = 19.111{,}40 \cdot 1{,}19 = 20.831{,}43$$

zu e) Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität	Schulden
1	240.000,00	21.600,00	4.800,00	26.400,00	235.200,00
2	235.200,00	21.168,00	5.232,00	26.400,00	229.968,00
3	229.968,00	20.697,12	5.702,88	26.400,00	224.265,12
4	224.265,12	20.183,86	6.216,14	26.400,00	218.048,98

Zusatz: Tilgungsplan (gesamt):

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität	Schulden
1	240.000,00	21.600,00	4.800,00	26.400,00	235.200,00
2	235.200,00	21.168,00	5.232,00	26.400,00	229.968,00
3	229.968,00	20.697,12	5.702,88	26.400,00	224.265,12
4	224.265,12	20.183,86	6.216,14	26.400,00	218.048,98
5	218.048,98	19.624,41	6.775,59	26.400,00	211.273,39
6	211.273,39	19.014,61	7.385,39	26.400,00	203.887,99
7	203.887,99	18.349,92	8.050,08	26.400,00	195.837,91
8	195.837,91	17.625,41	8.774,59	26.400,00	187.063,33
9	187.063,33	16.835,70	9.564,30	26.400,00	177.499,03
10	177.499,03	15.974,91	10.425,09	26.400,00	167.073,94
11	167.073,94	15.036,65	11.363,35	26.400,00	155.710,59
12	155.710,59	14.013,95	12.386,05	26.400,00	143.324,54
13	143.324,54	12.899,21	13.500,79	26.400,00	129.823,75
14	129.823,75	11.684,14	14.715,86	26.400,00	115.107,89
15	115.107,89	10.359,71	16.040,29	26.400,00	99.067,60
16	99.067,60	8.916,08	17.483,92	26.400,00	81.583,69
17	81.583,69	7.342,53	19.057,47	26.400,00	62.526,22
18	62.526,22	5.627,36	20.772,64	26.400,00	41.753,58
19	41.753,58	3.757,82	22.642,18	26.400,00	19.111,40
20	19.111,40	1.720,03	24.679,97	26.400,00	0,00

AUFGABEN PROZENTUALE ANNUITÄTENTILGUNG (GANZJÄHRIG):

Ein Kredit von 300.000 Euro soll bei 8% Zins p.a. durch gleiche jährlich nachschüssige Annuitäten zu 7% getilgt werden. (zzgl. einer Abschlusszahlung im letzten Jahr)

a) Wie hoch sind die zu zahlenden Annuitäten?
b) Wie viele Jahre dauert die Tilgung?
c) Wie hoch ist die Restschuld zu Beginn des 5. bzw. 7. Jahres?
d) Wie hoch ist die Abschlusszahlung, wenn sie ein Jahr nach der letzten vollen Annuität geleistet wird?
e) Erstellen Sie den Tilgungsplan für die ersten 3 Jahre.

Lösungen:

zu a) $A = S \cdot (i + i^*) = 300.000 \cdot (0{,}0{,}8 + 0{,}07) = 45.500$

zu b) $n = \frac{\ln(i+i^*) - \ln(i^*)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln(0{,}15) - \ln(0{,}07)}{\ln(1{,}08)} = 9{,}9 \approx 10\ Jahre$

zu c) $Z_k = i \cdot RS_k = A - T_k$ $\qquad T_k = T_1 \cdot q^{k-1}$

$$T_5 = 21.000 \cdot 1{,}08^4 = 28.570{,}27$$

$$RS_5 = \frac{45.000 - 28.570{,}27}{0{,}08} = 205.371{,}63$$

$$T_7 = 21.000 \cdot 1{,}08^6 = 33.324{,}36$$

$$RS_7 = \frac{45.000 - 33.324{,}36}{0{,}08} = 145.945{,}50$$

zu d) Abschlusszahlung:

$$S_{10} = RS_{10} \cdot q = \frac{45.000 - 21.000 \cdot 1{,}08^{9}}{0{,}08} \cdot 1{,}08 = 40.782{,}19$$

zu e) Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität	Schulden
1	300.000,00	24.000,00	21.000,00	45.000,00	279.000,00
2	279.000,00	22.320,00	22.680,00	45.000,00	256.320,00
3	256.320,00	20.505,60	24.494,40	45.000,00	231.825,60
4	231.825,60	18.546,05	26.453,95	45.000,00	205.371,65
5	205.371,65	16.429,73	28.570,27	45.000,00	176.801,38
6	176.801,38	14.144,11	30.855,89	45.000,00	145.945,49
7	145.945,49	11.675,64	33.324,36	45.000,00	112.621,13
8	112.621,13	9.009,69	35.990,31	45.000,00	76.630,82
9	76.630,82	6.130,47	38.869,53	45.000,00	37.761,29
10	37.761,29	3.020,90	40.782,19	40.782,19	0,00

✓ *Unterjährige Annuitätentilgung:*

In der bisherigen Betrachtung wurden, wurden stets Zeiträume betrachtet, in denen die Zahlungen der Tilgung und Zinsen bzw. der Annuitäten zusammen gefallen sind.

Unter einer unterjährigen Annuitätentilgung verstehen wir eine ganzjährige Verzinsung mit unterjährigen Tilgungsperioden:

halbjährlich:	$m=2$
vierteljährlich:	$m=4$
monatlich:	$m=12$

Demzufolge werden bei der unterjährigen Annuitätentilgung *m* (konstante) Annuitäten *a* gezahlt, wobei die Zinsbelastung nur am Ende der Zinsperiode erfolgt.
Während des Zinszeitraums nimmt also die Restschuld mit jeder Tilgung genau um *a* ab.

Für die Anrechnung der Tilgungen auf die Restschuld und somit auf die Zinsberechnung gibt es drei Möglichkeiten:

a) <u>sofortige Tilgungsverrechnung:</u>
Unterjährige Tilgungen werden sofort von der Restschuld abgezogen und die geringere Restschuld wird tag genau (mit einfacher Verzinsung) verzinst.

b) <u>Jährliche Tilgungsverrechnung:</u>
Unterjährige Tilgungen fließen auf ein unverzinsliches Tilgungskonto und obwohl die Tilgung geleistet wurde, werden die Zinsen weiterhin auf die Restschuld zu Beginn der Zinsperiode berechnet.

c) <u>Tilgungsrücklage:</u>
Unterjährige Tilgungen fließen auf ein mit dem Zinssatz *p* verzinsliches Tilgungskonto und zu einem definierten Zeitpunkt wird der angesammelte Betrag dem Kreditkonto gutgeschrieben.

✓ SOFORTIGE TILGUNGSVERRECHNUNG:

Bei der sofortigen Tilgungsverrechnung verringert sich die zu verzinsende Restschuld mit jeder der *m-1* Tilgungsleistungen.

Für den am Ende der Zinsperiode zu zahlende Betrag sind die Art der Zinsberechnung (Beginn bzw. Anfang) besonders wichtig.

Demzufolge ergibt sich als sogenannter **konformer Jahreszins**:

nachschüssig:

$$Z_k = i \cdot RS_k - a \cdot \frac{i \cdot (m-1)}{2}$$

vorschüssig:

$$Z_k = i \cdot RS_k - a \cdot \frac{i \cdot (m+1)}{2}$$

Für die am Ende einer Zinsperiode vorhandene Schuld (Restschuld) erhalten wir mittels der konformen Ersatzannuität:

nachschüssig:

$$S = RS_{k+1} == RS_k \cdot q - A = RS_k \cdot q - a \cdot \left[m + \frac{i \cdot (m-1)}{2}\right]$$

vorschüssig:

$$S = RS_{k+1} == RS_k \cdot q - A = RS_k \cdot q - a \cdot \left[m + \frac{i \cdot (m+1)}{2}\right]$$

Man erkennt, dass sich zuerst die Restschuld zu Beginn eines Jahres mittels Aufzinsungsfaktor *q* erhöht und anschließend durch die Ersatzannuität, die mittels einfacher Verzinsung der unterjährigen Annuität *a* berechnet wird, reduziert wird.

Die Ersatzannuität berechnet sich dadurch mittels:

nachschüssig:

$$A = a \cdot \left[m + \frac{i \cdot (m-1)}{2}\right]$$

vorschüssig:

$$A = a \cdot \left[m + \frac{i \cdot (m+1)}{2}\right]$$

Beispiel:
Eine Schuld für einen neuen PKW von 36.000 Euro soll durch eine halbjährige Annuitätentilgung bei sofortiger Tilgungsverrechnung getilgt werden.
(Laufzeit beträgt 3 Jahre, Zinssatz von 10%).

1) Nachschüssige Annuität bei jährlicher Tilgung:

$$A = S \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} = 36.000 \cdot \frac{1{,}1^3(1{,}1-1)}{1{,}1^3 - 1} = 14.476{,}13$$

2) nachschüssige Annuität bei halbjährlicher Tilgung:

$$a = \frac{A}{m + \frac{i \cdot (m-1)}{2}} = \frac{14.476{,}13}{2 + \frac{0{,}1 \cdot (2-1)}{2}} = 7.061{,}53$$

und konformer nachschüssige Jahreszins von

$$Z_k = 0{,}1 \cdot RS_k - a \cdot \frac{0{,}1}{2} = 0{,}1 \cdot RS_k - 353{,}08$$

Tilgungsplan:

k	m	RS_k	Z_k	T_k	A_k
1	1	36.000,00		7.061,53	7.061,53
	2	28.938,47	3.246,92	3.814,61	7.061,53
2	3	25.123,86		7.061,53	7.061,53
	4	18.062.33	2.159,31	4.902,22	7.061,53
3	5	13.160,11		7.061,53	7.061,53
	6	6.098.58	962,93	6.098,58	7.061,53

3) vorschüssige Annuität bei halbjährlicher Tilgung:

$$a = \frac{A}{m + \frac{i \cdot (m+1)}{2}} = \frac{14.476{,}13}{2 + \frac{0{,}1 \cdot (2+1)}{2}} = 6.733{,}08$$

und konformer vorschüssige Jahreszins von

$$Z_k = 0{,}1 \cdot RS_k - a \cdot \frac{0{,}1 \cdot 3}{2} = 0{,}1 \cdot RS_k - 1.009{,}96$$

Tilgungsplan:

k	m	RS_k	Z_k	T_k	A_k
1	1	36.000,00		6.733,08	6.733,08
	2	29.266,92	2.590,04	4.142,04	6.733,08
2	3	25.123,88		6.733,08	6.733,08
	4	18.390,80	1.502,43	5.230,65	6.733,08
3	5	13.160,15		6.733,08	6.733,08
	6	6.427,07	306,06	6.427,07	6.733,08

AUFGABEN ANNUITÄTENTILGUNG (UNTERJÄHRIG) I:

Ein Bauherr hat eine Hypothek von 100.000 Euro zu 8% Jahreszins aufgenommen, die 25 Jahre lang monatlich und vorschüssig durch konstante monatliche Annuitäten, die sofort zur Tilgung verwendet werden, zurückgezahlt werden muss.

Wie hoch ist seine monatliche Belastung?

Wie hoch ist die Restschuld nach 15 Jahren?

Lösung:

zu 1a) $S = 100.000 \qquad i = 0{,}08 \qquad n = 25 \qquad m = 12$

$$A = S \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} = 100.000 \cdot \frac{1{,}08^{25}(1{,}08-1)}{1{,}08^{25}-1} = 9.367{,}88$$

$$a = \frac{A}{m + \frac{i \cdot (m+1)}{2}} = \frac{9.367{,}88}{12 + \frac{0{,}08 \cdot (12+1)}{2}} = 748{,}23$$

zu 1b) $S_{15} = S \cdot q^n - A \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$

$$S_{15} = 100.000 \cdot 1{,}08^{15} - 9367{,}88 \cdot \frac{1{,}08^{15}-1}{1{,}08-1} = 62.859{,}17$$

AUFGABEN ANNUITÄTENTILGUNG (UNTERJÄHRIG) II:

Ein Kredit von 10.000 Euro soll bei jährlicher Verzinsung von 9% in zwei Jahren vierteljährlich und nachschüssig zu zahlenden konstante Annuitäten zurückgezahlt werden.

Bei der Verzinsung sollen die unterjährig gezahlten Beträge berücksichtigt werden.

Erstellen Sie den Tilgungsplan.

Lösung:

$S = 10.000 \qquad i = 0{,}09 \qquad n = 2 \qquad m = 4$

$$A = S \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} = 10.000 \cdot \frac{1{,}09^2 (1{,}09-1)}{1{,}09^2 - 1} = 5.684{,}69$$

$$a = \frac{A}{m + \frac{i \cdot (m-1)}{2}} = \frac{5.684{,}69}{4 + \frac{0{,}09 \cdot (4-1)}{2}} = 1.374{,}77$$

$$Z_k = 0{,}09 \cdot RS_k - a \cdot \frac{0{,}09}{2} = 0{,}09 \cdot RS_k - 61{,}86$$

Tilgungsplan:

k	m	RS_k	Z_k	T_k	A_k
1	1	10.000,00		1.374,77	1.374,77
	2	8.625,23		1.374,77	1.374,77
	3	7.250,46		1.374,77	1.374,77
	4	5.875,69	838,14	536,63	1.374,77
2	1	4.500,92		1.374,77	1.374,77
	2	3.126,15		1.374,77	1.374,77
	3	1.751,38		1.374,77	1.374,77
	4	376,61	343,22	1.031,55	1.374,77

AUFGABEN

1) Ein Kredit wird nach 2 Jahren und zu einem Zinssatz von 12% getilgt, wobei die nachschüssige Zahlung alle 4 Monate zu 7.965,17 € erfolgt und die letzte Rate am 01.01. des dritten Jahres gezahlt wird.

a) Wie groß ist die jährliche Annuität?

b) Bestimmen Sie die Gesamtgröße des Kredits (auf ganze Euro gerundet).

c) Erstellen Sie den Tilgungsplan für die ersten 2 Jahre.

2) Ein Kredit von 10.000 € wird nach 4 Jahren und zu einem Zinssatz von 5% getilgt, wobei die nachschüssige Zahlung alle 3 Monate erfolgen und die letzte Rate am 01.01. des fünften Jahres gezahlt wird.

a) Wie groß ist die jährliche Annuität?

b) Bestimmen Sie die unterjährige Annuität.

c) Erstellen Sie den Tilgungsplan für die ersten 2 Jahre.

LÖSUNG

1) a) Jahres-Annuität: $a = \frac{A}{m+\frac{i\cdot(m-1)}{2}} \Leftrightarrow A = 7.965{,}17 \cdot \left(3 + 0{,}12 \cdot \frac{2}{2}\right) = 24.851{,}33\ €$

b) Gesamtkredit: $A = S \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} \Leftrightarrow S = 24.851{,}33 \cdot \frac{1{,}12^2 - 1}{1{,}12^2 \cdot (1{,}12-1)} \approx 42.000\ €$

c) konformer Jahreszins: $Z_k = i \cdot RS_k - a \cdot \frac{i\cdot(m-1)}{2} = 0{,}12 \cdot RS_k - 7.965{,}17 \cdot \frac{0{,}12\cdot 2}{2}$

$$Z_k = 0{,}08 \cdot RS_k - 955{,}82$$

Tilgungsplan (2 Jahre):

k	m	RS	Z	T	A
2	1	42.000,00		7.965,17	7.965,17
	2	34.034,83		7.965,17	7.965,17
	3	30.153,84	4.084,18	3.880,99	7.965,17
2	1	22.188,67		7.965,17	7.965,17
	2	14.233,50		7.965,17	7.965,17
	3	7.965,15	1.706,82	6.258,35	7.965,17
3	1	0		7.965,15	7.965,17

ES

IST

VOLLBRACHT,

AUF

ZU

NEUEN

ZIELEN