MATHEMATIK

15.07.2019

WIEDERHOLUNG

Diese Lücken sollten nicht auch bei Ihnen vorhanden sein:

Im Bereich der Zinsberechnung wird zwischen der einfachen (________) Verzinsung und dem Zinseszins (___________) unterschieden.
Bei der linearen Verzinsung wird in jedem Jahr der _____Betrag auf das ___________addiert, während innerhalb der Zinseszinsen-Methode die ________nach jeder Zeitperiode gutgeschrieben werden und sich dadurch ________ ________.
Wenn bei der Zeitberechnung das Schaltjahr ___________werden muss, so handelt es sich um die ________(Basis 360 Tage) oder die ________(Basis exakte Jahr) Methode.
In der ________Methode wird jeder Monat mit __Tagen gerechnet, so dass die Basis dadurch auch ____Tage beträgt.
Erfolgt eine _______Zinsberechnung am Anfang und am Ende mit ____________Zeitperioden zwischen Ein- und Auszahlung, so kann das ________direkt mittels der ___________bestimmt werden.

Bei einer Abschreibung werden _______________ eines Gutes während der Nutzungsdauer festgehalten.
Wichtige Größen im Bereich der Abschreibungen sind der _____________, der sich durch die Differenz der ___________und der summierten _______________ergibt.
In der ____________Abschreibung ist sowohl der ______________bzgl. des Neuwerts als auch der Abschreibungsbetrag konstant. Dadurch steigt der Prozentsatz bzgl. des ___________und hat im letzten Jahr seinen ___________Wert.
Bei der ___________Abschreibung wird in jedem Jahr der _______________Prozentsatz bzgl. des Restwerts abgeschrieben.
Demzufolge muss sich der ____________________in jedem Jahr verändern und hat im letzten Jahr der Abschreibung seinen ____________Wert.
Um bei der ____________Abschreibung den Schwankungen der ___________entgegen wirken zu können, legt man einen ______ _____________Betrag zu Beginn der Laufzeit fest und kann dadurch die Degression_________.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was ist eine konstante Rente?
- ✓ Wie kann man die Rentenrate bestimmen?
- ✓ Was bedeutet der Barwert einer Rente?
- ✓ Worin liegt der Unterschied zwischen vor- und nachschüssig?
- ✓ Was bedeutet eine unterjährige Rentenzahlung?
- ✓ Welche Formen der Zinsperioden gibt es?
- ✓ Was ist eine konforme Ersatzrentenzahlung?
- ✓ Wie kommt man zu einer ewigen Rente?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

Aufgaben:

1) Eine Reinigungsmaschine (Neuwert 120.000 Euro) soll innerhalb von 10 Jahren auf einen Restwert von 10.000 Euro abgeschrieben werden.

   a) Wie hoch ist der jährliche Abschreibungsbetrag?
   b) Erstellen Sie für die ersten 5 Jahre den Abschreibungsplan?
   c) Wie groß wäre bei degressiver Abschreibung der Abschreibungsplan im 5. Jahr?

2) Nach einer Laufzeit von 20 Jahren bei geometrisch degressiver Abschreibung und einem Prozentsatz von 17,5% hat eine Maschine einen Restwert von 4.266,87 €.

   a) Berechnen Sie die Anschaffungskosten der Maschine.
   b) Erstellen Sie den Abschreibungsplan für die ersten 5 Jahre.
   c) Nach welcher Zeit ist der Restwert weniger als 10% des Anschaffungspreises?

RENTENRECHNUNG:

DEFINITION:
Unter einer Rente versteht man einen Zahlungsstrom, dessen Zahlungen gewissen Gesetzmäßigkeiten gehorchen und periodisch sind, wobei die Zahlungen **nachschüssig** (Ende einer Periode) oder **vorschüssig** (Anfang einer Periode) erfolgen.

Die Laufzeit einer solchen Rentenzahlung kann **fest** vorgegeben werden oder auch **unendlich** sein.

Die Rentenzahlung als solche kann – analog zu der Zinsrechnung – **jährlich** oder auch **unterjährig** erfolgen wobei sich die Zahlungen wie folgt unterscheiden:

- ✓ konstant: Rate bleibt konstant
- ✓ arithmetisch: Rate verändert sich anhand eines Betrages
- ✓ geometrisch: Rate verändert sich mittels Prozentsatzes

Symbole / Variablen der Zinsrechnung:

R_0	Barwert der Rente	R_n	Endwert der Rente
R_k	Zeitwert der Rente		
r	Rentenrate (Konstanz)	r_t	Rentenrate (Periode)
n	Laufzeit der Rente		
m	Anzahl der Rentenzahlungen pro Zinsperiode		

Werden aus einem festen Kapital Renten am Ende eines Jahres (nachschüssig) gezahlt, so geschieht dies mittels:

$$K_n = K_0 \cdot q^n - R_n$$

NACHSCHÜSSIGE KONSTANTE RENTEN:

Man geht davon aus, dass die Zahlung einer Rente stets am Ende einer Rentenperiode erfolgt, so dass sich die Rentenrate bei einer Laufzeit von *n* Jahren *(n-1)* – mal verzinst.

$$R_n = r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \cdots + r \cdot q + r$$

$$R_n = r \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) = r \cdot \sum_{t=0}^{n-1} q^t$$

Aufgrund dieser geometrischen Reihe ergibt sich durch den definierten Grenzwert für den **Endwert**:

$$R_n = r \cdot \sum_{t=0}^{n-1} q^t = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Der **Barwert** entspricht dem theoretischen Ausgangskapital, das man heute anlegen müsste, um mittels Zinseszins nach *n* Jahren auf das Endkapital (Rentenendwert) zu kommen.

Der Barwert errechnet sich durch Abzinsung des Endwerts.

$$R_0 = R_n \cdot q^{-n} = \left[r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\right] \cdot \frac{1}{q^n} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n+1} - q^n}$$

Beispiel (nachschüssig):
Genau 10 Jahre lang wurde jeweils zum Jahresende ein Betrag von 12.000 Euro zum Zinssatz von 4% angelegt.

a) Wie viel kann zu Beginn des 11. Jahres abgehoben werden?

b) Bestimmen Sie den dazu gehörigen Rentenbarwert.

zu a) $R_{10} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 12.000 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} = 144.073{,}20$

zu b) $R_0 = \frac{R_{10}}{q^n} = \frac{144.073{,}20}{1{,}04^{10}} = 97.330{,}80$

AUFGABEN NACHSCHÜSSIGE RENTEN:

1) Ein Steuerberater kauft eine Praxis eines älteren Kollegen und muss als Kaufpreis 10 Jahre lang jährlich je 12.500 Euro zahlen. Durch welchen Betrag könnte der Steuerberater diese Zahlungen sofort bei Vertragsabschluss ablösen, wenn mit 8% Zinsen kalkuliert wird.

2) Der Barwert einer über 15 Jahre laufenden nachschüssigen Jahresrente beträgt bei 5%-iger Verzinsung 10.380 Euro. Wie hoch sind die jährlichen Rentenzahlungen?

3) Eine jährliche Rentenrate von 2.500 Euro erbringt nach seiner Laufzeit bei einer nachschüssigen Verzinsung von 5% einen Endwert von 39.792,82 Euro. Wie lange wurde diese Rentenzahlung getätigt?

Lösungen:

zu 1) $$R_{10} = 12.500 \cdot \frac{1{,}08^{10}-1}{1{,}08-1} = 181.083{,}03$$

$$R_0 = \frac{181.083{,}03}{1{,}08^{10}} = 83.876{,}48$$

zu 2) $$R_0 = r \cdot \frac{q^n-1}{q^{n+1}-q^n}$$

$$r = R_0 \cdot \frac{q^{n+1}-q^n}{q^n-1} = 10.380 \cdot \frac{1{,}05^{16}-1{,}05^{15}}{1{,}05^{15}-1} \approx 1.000$$

zu 3) $$R_n = r \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$$

$$n = \frac{log\left[\frac{R_n}{r} \cdot (q-1)+1\right]}{log(q)} = \frac{log\left[\frac{39.792{,}82}{2.500} \cdot 0{,}05+1\right]}{\log(1{,}05)} = 12\ Jahre$$

VORSCHÜSSIGE KONSTANTE RENTEN:

Der Rentenbetrag wird nun jeweils zu Beginn einer Rentenperiode und damit am Anfang jeden Jahres bezahlt.
Da dieser somit ab diesem Zeitpunkt mit dem Zinssatz *p* verzinst wird, werden die bereits entwickelten Formeln für den Endwert lediglich mit dem Aufzinsungsfaktor *q* ergänzt.

Für den **Endwert** ergibt sich dadurch:

$$R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}$$

Der **Barwert** bezieht sich auf das erwirtschaftete Endkapital und wird daher mit der gleichen Formel wie bei nachschüssiger Renten berechnet.

Beispiel (vorschüssig):
Genau 10 Jahre lang wurde jeweils zum Jahresanfang ein Betrag von 12.000 Euro zum Zinssatz von 4% angelegt.
Bestimmen Sie den End- als auch Barwert der Rentenzahlungen.

$$R_{10} = r \cdot \frac{q^{n+1} - q}{q-1} = 12.000 \cdot \frac{1{,}04^{11} - 1{,}04}{1{,}04 - 1} = 149.836{,}22$$

Berechnung mittels nachschüssiger Endwertformel:

$$r^* = r \cdot q = 12.000 * 1{,}04 = 12.480$$

$$R_{10} = r^* \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = 12.480 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} = 149.836{,}22$$

Für den zugehörigen Rentenbarwert ergibt sich:

$$R_0 = \frac{R_{10}}{q^n} = \frac{149.836{,}22}{1{,}04^{10}} = 101.223{,}98$$

AUFGABEN VORSCHÜSSIGE RENTEN:

1) Wie viele Jahre muss man bei 6% Zins jährlich jeweils am Jahresanfang 1.000 Euro einzahlen, bis das angewachsene Kapital 100.000 Euro übersteigt?

2) Vom 01.01.2012 bis 01.01.2016 sollen von einem Sparkonto jeweils (Jährlich-vorschüssig) 5.000 Euro abgehoben werden können.
   Als Grundlage für diese Auszahlungen wurde Anfang 2009 ein einmaliger Betrag eingezahlt.

   Wie hoch musste dieser sein, wenn zu 5% verzinst wurde?

Lösungen:

zu 1) $R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = r \cdot \frac{q^{n+1} - q}{q-1}$

$$q^n = \frac{R_n}{r \cdot q} \cdot (q-1) + 1$$

$$n = \frac{log\left[\frac{R_n}{r \cdot q} \cdot (q-1) + 1\right]}{\log(q)}$$

$$n \geq \frac{log\left[\frac{100.000}{1.000 \cdot 1{,}06} \cdot (1{,}06 - 1) + 1\right]}{\log(1{,}06)} = 32{,}54 \approx 33\ Jahre$$

zu 2) $R_{2016} = r \cdot \frac{q^{n+1} - q}{q-1} = 5.000 \cdot \frac{1{,}05^5 - 1{,}05}{1{,}05 - 1} = 22.628{,}16$

$$K_{2009} = R_{2016} \cdot q^{-n} = \frac{22.628{,}16}{1{,}05^3} = 19.547{,}05$$

UNTERJÄHRIGE KONSTANTE RATEN:

Mit unterjährigen, konstanten Raten werden mehrere gleich lange Rentenperioden innerhalb einer Zinsperiode definiert d.h. es finden *m* Rentenzahlungen pro Jahr (Zinsperiode) statt.

Auch diese unterjährigen Zahlungen können **vorschüssig** oder auch **nachschüssig** erfolgen.

Da innerhalb der Zinsperiode mit einfacher Verzinsung gerechnet wird, ergeben sich vor-/nachschüssige Ersatzbeträge je Jahr, die als **konforme jährlich nachschüssige Ersatzrentenraten** bezeichnet werden .
$(r_e = nachschüssig;\ r_e^* = vorschüssig)$.

$$r_e = r + r \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right) + r \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot i}{m}\right) + \cdots + r \cdot \left(1 + \frac{(m-1) \cdot i}{m}\right)$$

$$r_e = r \cdot m + \frac{i \cdot r}{m} \cdot (1 + 2 + \cdots + (m-1))$$

$$r_e = r \cdot \left[m + \frac{i \cdot (m-1)}{2}\right] \quad \text{bzw.} \quad r_e^* = r \cdot \left[m + \frac{i \cdot (m+1)}{2}\right] \ (vorschüssig)$$

Durch diese Ersatzrate ergibt sich für den Endwert folgende Formel:

$$R_n = r_e \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \left[m + \frac{i \cdot (m-1)}{2}\right] \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Beispiel (unterjährig):

Genau 10 Jahre lang wurde jeweils monatlich (nachschüssig) ein Betrag von 1.000 Euro zum Zinssatz von 4% angelegt.

Bestimmen Sie die Ersatzrentenraten und den Endwert.

$$r_e = r \cdot \left[m + \frac{i \cdot (m-1)}{2}\right] = 1000 \cdot \left[12 + \frac{0{,}04 \cdot 11}{2}\right] = 12.220$$

$$R_{10} = r_e \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 12.220 \cdot \frac{1{,}04^{10} - 1}{1{,}04 - 1} = 146.714{,}54$$

AUFGABEN UNTERJÄHRIGE RENTEN:

Ein Vater zahlt nach der Geburt seiner Tochter, vierteljährlich nachschüssig 20 Jahre lang je 1.000 Euro auf ein Bankkonto ein. Der angesammelte Geldbetrag soll der Tochter nach Abschluss ihres 20. Lebensjahres als Ausbildungsförderung zur Verfügung stehen.

Wie lang wird das ausgezahlte Kapital reichen, wenn sie 1.000 Euro monatlich (vorschüssig) abhebt und während der gesamten Zeitspanne ein Zinssatz von 5% zugrunde liegt?

Lösung:

Einzahlung:

$$r_e = r \cdot \left[m + \frac{i \cdot (m-1)}{2}\right] = 1.000 \cdot \left[4 + \frac{0{,}05 \cdot 3}{2}\right] = 4.075$$

$$R_{20} = r_e \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = 4.075 \cdot \frac{1{,}05^{20} - 1}{1{,}05 - 1} = 134.743{,}76$$

Auszahlung:

$$r_e^* = r \cdot \left[m + \frac{i \cdot (m+1)}{2}\right] = 1.000 \cdot \left[12 + \frac{0{,}05 \cdot 13}{2}\right] = 12.325$$

$$n = \frac{log\left[\frac{R_n}{r_e^*} \cdot (q-1) + q\right]}{\log (q)} - 1$$

$$n = \frac{log\left[\frac{134.743{,}76}{12.325} \cdot (0{,}05) + 1{,}05\right]}{\log (1{,}05)} - 1 \approx 8{,}5\ Jahre$$

EWIGE RENTE:

Wird für die Rente kein Endtermin und damit bei jährlichen Renten kein endlicher Wert für *n* vereinbart, so bezeichnet man sie als sogenannte **ewige Rente**.

Da der Endwert einer ewigen Rente nicht existiert, beschränken sich Berechnungsmöglichkeiten auf den **Barwert der ewigen Rente**.

Für einen positiven Zinssatz (q>1) ergibt sich:

$$R_0 = r \cdot \frac{1}{q} + r \cdot \frac{1}{q^2} + r \cdot \frac{1}{q^3} + \cdots = \frac{r}{q} \cdot \left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \cdots\right]$$

$$R_0 = \frac{r}{q} \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^t = \frac{r}{q} \cdot \frac{1}{1 - {}^1\!/_q} = \frac{r}{q-1} = \frac{r}{i}$$

Beispiel (ewige Rente):

Beim Lottospielen hat Hugo 400.000 Euro gewonnen, die er zu einem Zinssatz von 4,5% „ewig“ anlegen möchte.

a) Wie hoch ist die jährliche nachschüssig Rente?

b) Wie hoch ist die jährliche vorschüssig Rente?

zu a) Nachschüssig: $r = R_0 \cdot i = 400.000 * 0{,}045 = 18.000$

zu b) Vorschüssig: $r = R_0 \cdot \frac{i}{q} = 400.000 * \frac{0{,}045}{1{,}045} = 17.224{,}88$

AUFGABEN EWIGE RENTEN:

1) Jemand erbt 200.000 Euro und legt das Geld zu 7% an. Welchen Betrag kann er als ewige jährliche-nachschüssige bzw. vorschüssige Rente Jahr für Jahr abheben?

2) Peter gewinnt im Alter von 12 Jahren am 30.06. 80.000 Euro und legt diese bis zur Vollendung seines 18. Lebensjahres (31.12.) mit 5% auf einer Bank an.

   a) Welches Kapital steht Peter am 31.12. zur Verfügung?
   b) Mit welchem Zinssatz kann eine ewige Rente von 2.500 Euro jährlich-nachschüssig ausgezahlt werden?
   c) Wie hoch wäre bei einer Verzinsung von 7,5% und einer halbjährliche nachschüssigen Auszahlung der Betrag?

Lösung:

zu 1) Nachschüssig: $r = R_0 \cdot i = 200.000 * 0{,}07 = 14.000$

Vorschüssig: $r = R_0 \cdot \frac{i}{q} = 200.000 * \frac{0{,}07}{1{,}07} = 13.084{,}11$

zu 2a) <u>Sparbuchmethode</u>: $K_{x,t_0} = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t_1}{360}\right) \cdot (1+i)^n$

$K_{31.12} = 80.000 \cdot \left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot (1{,}05)^5 = 104.655{,}09$

zu 2b) $i = \frac{r}{R_0} = \frac{2.500}{104.655{,}09} = 0{,}02388 \approx 2{,}4\%$

zu 2c) $r_e = r \cdot \left[m + \frac{i \cdot (m-1)}{2}\right] = r \cdot \left[2 + \frac{0{,}075 \cdot 1}{2}\right] = r \cdot 2{,}0375$

$r \cdot 2{,}0375 = R_0 \cdot i = 104.655{,}09 \cdot 0{,}075 = 7.849{,}13$

$r = \frac{7.849{,}13}{2{,}0375} = 3.852{,}33$