

MATHEMATIK

27.06.2018

AUFGABEN I

1) Gegeben sei die Menge $Z = \left\{ \frac{1}{2} \cdot x + e \cdot y; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ und der Standardaddition .
Um welche maximale Struktur handelt es sich bei $(Z, +)$?

2) Handelt es sich bei der folgenden Struktur $\left(\sqrt{\frac{9}{e^{2x}}}, * \right)$ um eine Gruppe innerhalb der reellen Zahlen?

3) Bilden die folgenden vier Vektoren eine Basis? Geben Sie die Dimension an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie den Vektor $\vec{x} = (4; -4; 1; -2)^T$ als deren Linearkombination dar.

AUFGABEN II

4) Gegeben ist die Ebene $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Prüfen Sie, ob der Punkt $A = (5; -2; 1)$ in der Ebene liegt.

Bestimmen Sie eine Gerade, die durch A geht und senkrecht zu e verläuft.

5) Berechnen Sie die Gleichung der Schnittgeraden von den beiden Ebenen

$$e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } e_2: 2x + 3y + 2z = 10$$

6) Gegeben sind die zwei Punkte $A = (5; 0; -3)^T$ und $B = (4; 2; 2)^T$ sowie die Ebene

$$e_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R}$$

a) Berechnen Sie die Geradengleichung durch A und B .

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene .

c) Geben Sie den Schnittwinkel des Stellungsvektors der Ebene und der Geraden an.

AUFGABEN III

7) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A linear abhängig? $A = \begin{pmatrix} \beta & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2\beta \\ 1 & 4 & \beta \end{pmatrix}$

8) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Determinatengleichung erfüllt?

$$\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

9) Berechnen Sie den Determinantenwert der komplexen Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} i & -2 & 0 & -i \\ 2 & 0 & -2i & 1 \\ 0 & 2i & i & -2 \\ -i & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$