MATHEMATIK

08.07.2019

WIEDERHOLUNG

Diese Lücken sollten nicht auch bei Ihnen vorhanden sein:

Soll innerhalb einer Reihe ein bestimmtes Intervall näher untersucht werden, bestimmt man das __________, wobei durch das (aufgerundete)_________aus Gesamtzahl und Quantilfaktor die zugehörige Position des ______________ bestimmt wird.
Die statistischen _________________dienen dazu, den Abstand der Beobachtungswerte vom ____________näher zu beschreiben und dadurch dessen Qualität bestimmen zu können.
Mittels der ________________zwischen dem kleinsten und größten Wert einer Urliste erhält man die sogenannte ______________(Range).
Bildet man den ____________der Abweichungsquadrate der Ausprägungen zum __________, so erhält man die _____________und durch deren __________die Standardabweichung.
Damit man unterschiedliche Untersuchungen bzgl. deren Qualität miteinander ____________kann, bildet man den ___________aus Standardabweichung und ____________, wodurch man das Relative Streuungsmaß (_____________) erhält.
Werden die Untersuchungsergebnisse zu dem ___________in Beziehung gesetzt, erfolgt dies nicht durch Berechnung der Abweichungsquadrate, sondern man bildet den Durchschnitt aller ___________und bekommt dadurch die _______________________(MAD).

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was ist eine einfache Verzinsung?
- ✓ Was versteht unter der Variante „gestern“ bzw. „morgen“?
- ✓ Was ist die englische, deutsche bzw. französische Methode?
- ✓ Was versteht man unter der Sparbuchmethode?
- ✓ Was bedeutet der Begriff Abschreibung?
- ✓ Worin unterscheiden sich lineare und degressive Abschreibung?
- ✓ Was ist ein Abschreibungsplan?
- ✓ Was ist die Abschwächung der Degression?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABE I

1. Die Preisentwicklung für Oliven wird in der folgenden Tabelle dargestellt:

Monat	Jan	Feb	Mrz	Apr	Mai	Juni	Juli	Aug	Sept	Okt	Nov	Dez
2011	110	120	110	80	110	120	150	120	100	80	110	100

a) Berechnen Sie die relativen und absoluten Häufigkeiten.
b) Bestimmen Sie den arithmetische Mittel, den Modus und alle Quartile.
c) Wie groß ist die Varianz im Jahr für die Olivenpreise?
d) Berechnen Sie die monatlichen Wachstumsfaktoren und für diese einen geeigneten Mittelwert und begründen Sie Ihre Wahl.

2. An der Hochschule Fulda wurden 50 Studierende nach ihren Fehltagen im aktuellen Wintersemester 2011/12 gefragt und gaben folgende Werte an:

1	3	2	2	9	2	0	1	3	8	4	1	0	0	4	2	6	4	2	8	3	1	2	8	4
8	1	4	3	9	7	8	6	0	5	2	2	4	5	7	2	3	9	7	4	6	8	1	3	6

a) Berechnen Sie die relativen und absoluten Häufigkeiten.
b) Bestimmen Sie die durchschnittlichen Fehltage je Student(in) und den Modalwert.
c) Wie groß ist die Standardabweichung?
d) Geben Sie das 20%-Quantil, den Median und das 75%-Quantil an.

Symbole / Variablen der Zinsrechnung:

K_0	Anfangskapital	K_n	Endkapital
n	ganzzahlige Laufzeit	f	gebrochene Laufzeit
Z	Zinsen	p	Prozentzinssatz
$i = \frac{p}{100}$	Zinssatz		
$q = 1 + i$	Aufzinsungsfaktor	$v = \frac{1}{q}$	Abzinsungsfaktor

Zeitdifferenzen:

Die Zeitdifferenzen bzw. Laufzeiten werden von Unternehmen zu Unternehmen unterschiedlich gehandhabt und somit auch berechnet, wobei es folgende beiden Varianten gibt:

- ✓ Variante „gestern":
  Einzahlungen werden ab dem Einzahlungstag verzinst (**Wert heute**), während bei Auszahlungen die Verzinsung des Betrages einen Tag vor dem Auszahlungstag endet (**Wert gestern**).

- ✓ Variante „morgen":
  Einzahlungen werden ab dem folgenden Tag der Einzahlung verzinst (**Wert morgen**), während bei Auszahlungen die Verzinsung direkt am Auszahlungstag endet (**Wert heute**).

Berechnungsmethoden (Zinstage/Jahrtage):

- ✓ <u>Englische Methode (365/365):</u>
  Sie wird auch Methode der exakten Berechnung genannt, da die Zinstage der tatsächlichen Tage je Monat entspricht und auch das Jahr mit den exakten Tagen (Schaltjahr 366 Tage) angegeben wird.

- ✓ <u>Französische Methode (365/360):</u>
  Die Zinstage werden in dieser Methode exakt berechnet, wobei das Kalenderjahr mit 360 Tagen pauschalisiert wird.
  Auf diese Weise erhält der Anleger durch mehrere Abschnitte mehr als den nominellen Jahreszinssatz.

- ✓ <u>Deutsche Methode (360/360):</u>
  Hier wird der Monat mit 30 Tagen veranschlagt, wodurch sich auf das Jahr gesehen 360 Tage ergeben. Somit erhält ein Anleger für einen kurzen Monat mehr Zinsen und für einen langen Monat weniger.

Berechnungsformel Zinstage:

Mittels der deutschen Methode können die Zinstage einfach berechnet werden, in dem *m* den aktuellen Monat (Januar=1; Februar=2 etc.) angibt und *d* den zugehörigen Tag im Monat.

- ✓ Gestern: $t = (m - 1) \cdot 30 + (d - 1)$
- ✓ Morgen: $t = (m - 1) \cdot 30 + d$

Bei variablen Anfangsdatum mit dem Tag d_A und zugehörigem Monat m_A bzw. dem Endtag d_E und dem Monat m_E erfolgt die Berechnung je nach Variante durch:

- ✓ Gestern: $t = (m_E - m_A - 1) \cdot 30 + (30 - d_A + 1) + (d_E - 1)$
- ✓ Morgen: $t = (m_E - m_A - 1) \cdot 30 + (30 - d_A) + d_E$

Beispiel:

Ein Kapital wird in dem aktuellen Jahr bis zum 09. September angelegt:

- ✓ Gestern: $t = (9-1) \cdot 30 + (9-1) = 248\, Tage$
- ✓ Morgen: $t = (9-1) \cdot 30 + 9 = 249\, Tage$

Ein Kapital wird vom 05.03.2011 bis zum 16.05.2011 verzinst.

- ✓ Gestern: $t = (5-3-1) \cdot 30 + (30-5+1) + (16-1) = 71\, Tage$
- ✓ Morgen: $t = (5-3-1) \cdot 30 + (30-5) + 16 = 71\, Tage$

Einfache Verzinsung:

Für die lineare Verzinsung ergibt sich für das Endkapital und einer ganzjährigen Laufzeit von *n* Jahren folgende Formel:

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot i \cdot n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p \cdot n}{100}\right)$$

Im Fall einer unterjährigen Laufzeit *f* ergibt sich:

$$K_f = K_0 \cdot (1 + i \cdot f), mit\ f = \frac{t}{360}$$

Aufgrund dieser beiden Formeln der einfachen Verzinsung, kann, sofern drei Größen bekannt sind, der fehlende letzte Wert mittels einfacher arithmetischer Umformungen berechnet werden.
Bei der Bestimmung von *f* muss darauf geachtet werden, ob die Zeiteinheiten in Tage (Nenner=360) oder in Monaten (Nenner=12) angegeben wurde.

Beispiel:

Ein Kapital von 25.000 Euro wird zu 4 % angelegt.
Berechnen Sie das Endkapital für die folgenden Laufzeiten:

a) 5 Jahren
b) 15.05.2010 bis 16.09.2010
c) 22.10.2010 bis heute
d) Wie lange dauert es bis zur Verdopplung

zu a) $K_5 = 25000 + 25000 \cdot 0{,}04 \cdot 5 = 30000$

zu b) $K_{121} = 25000 \cdot \left(1 + 0{,}04 \cdot \frac{121}{360}\right) = 25336{,}11$

zu c) $K_{218} = 25000 \cdot \left(1 + 0{,}04 \cdot \frac{218}{360}\right) = 25605{,}55$

zu d) $(1 + 0{,}04 \cdot f) = 2 \qquad f = 360 \cdot \frac{1}{0{,}04} = 9000\ Tage$

Aufgabe:

Folgende Zahlungen sind nach der Deutschen Methode mit einem Zinssatz von 4,5% auf einem Sparkassenkonto zu verzinsen.
Der Kontostand am 31.12.2003 betrug 4260,90 €.
(Sparkassen buchen nach der „gestern“-Variante, d.h. Einzahlungen „Wert heute“ und Auszahlungen „Wert gestern“).

10.01.2004:	Auszahlung	1500,00 €
19.02.2004:	Einzahlung	4000,00 €
26.04.2004:	Einzahlung	2700,00 €
04.12.2004:	Auszahlung	1600,00 €

Welcher Betrag existiert am Ende von 2004 auf dem Konto?

Lösung:

31.12.2003	10	10.01.2004	39	19.02.2004	- 67 -	26.04.2004	218	04.12.2004	26	31.12.2004
			-1500 €		+4000 €		+2700 €		-1600 €	
4260,90 €		2760,90 €		6760,90 €		9460,90 €		7860,90 €		€

31.12.2003-10.01.2004: $Z_1 = 4260{,}90 \cdot 0{,}045 \cdot \frac{10}{360} = 5{,}325$

10.01.2004-19.02.2004: $Z_2 = 2760{,}90 \cdot 0{,}045 \cdot \frac{39}{360} = 13{,}459$

19.02.2004-26.04.2004: $Z_3 = 6760{,}90 \cdot 0{,}045 \cdot \frac{67}{360} = 56{,}622$

26.04.2004-04.12.2004: $Z_4 = 9460{,}90 \cdot 0{,}045 \cdot \frac{218}{360} = 257{,}809$

04.12.2004-31.12.2004: $Z_5 = 7860{,}90 \cdot 0{,}045 \cdot \frac{26}{360} = 25{,}547$

Schneller:

$$\left.\begin{array}{l} 4260{,}90 \cdot 10 \\ 2760{,}90 \cdot 39 \\ 6760{,}90 \cdot 67 \\ 9460{,}90 \cdot 218 \\ 7860.90 \cdot 26 \end{array}\right\} \cdot 0{,}045 \cdot \frac{1}{360} = 358{,}76$$

$$\text{Endkapital} = 7860{,}90 + 358{,}76 = 8219{,}66$$

Zinseszinsrechnung:

Man sagt, ein Kapital ist auf Zinseszins angelegt, sofern am Ende der Zinsperiode die Zinsen nicht ausbezahlt, sondern zu dem existierenden Kapital zugeschlagen werden.
Dieser neue Betrag (Kapital + Zinsen) bildet das Grundkapital für die folgende Zinsperiode.

Bei einer ganzjährlichen Verzinsung berechnet sich das Endkapital:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = K_0 \cdot q^n$$

Für unterjährige Verzinsung ergibt sich die folgende Formel, wobei das Jahr in *m* Zinsperioden unterteilt wird.
(m=2: halbjährlich; m=4: quartalsweise; m=12: monatlich)

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^n$$

Im Fall von gemischten Laufzeiten, d.h. unterjährig in Kombination mit ganzjährlichen Laufzeiten, werden die einfache Verzinsung und die Zinseszinsrechnung miteinander verschachtelt.

<u>Sparbuchmethode</u>: $K_{x,t_0} = K_0 \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t_1}{360}\right) \cdot (1 + i)^n \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t_2}{360}\right)$

Beispiel:

Am 15.09.2003 wurden 25000 Euro zu 6,75% angelegt.
Wie hoch ist der Endbetrag am 20.09.2010 (Variante „morgen“) mittels

a) Standard-Zinseszinsformel
b) Sparbuchmethode

zu a) $t = 105\, Tage + 6\, Jahre + \ 260\, Tage = 2525\, Tage$

$$K_x = 25000 \cdot 1{,}0675^{\frac{2525}{360}} = 25000 \cdot 1{,}0675^{7+\frac{5}{360}} = 39528{,}40$$

zu b) $K_{x,0} = 25000 \cdot \left(1 + 0{,}0675 \cdot \frac{105}{360}\right) \cdot 1{,}0675^{6} \cdot \left(1 + 0{,}0675 \cdot \frac{260}{360}\right)$

$$K_{x,0} = 25000 \cdot 1{,}581183 = 39529{,}58$$

AUFGABE

1. Zur Gründung der Stadt Fulda (744 n.chr.) wurde ein Cent angelegt und mit einem Prozentsatz von 1% verzinst. Berechnen Sie das Endkapital (Stand 01.01.2011) bei

   a) Einfacher Verzinsung
   b) Zinseszins

2. Ein Kapital von 10.000 € wurde am 31.10.2006 (Variante „morgen“) auf ein Konto eingezahlt und mit einem Zinssatz von 5% (Deutsche Methode) verzinst.

   a) An welchem Datum (Jahr 2012) beträgt der Kontostand 12.944,24 €?
   b) Im Jahr 2013 werden am 30.06.2013 der Betrag von 5666,60 € eingezahlt. Wie hoch ist der Kontostand am 01.01.2014?

3. Nach einer Laufzeit von 15 Jahren bei geometrisch degressiver Abschreibung wird eine Maschine (Neupreis 125.000 €) auf einen Restwert von 4.000 € abgeschrieben.

   a) Bestimmen Sie den Abschreibungsprozentsatz.
   b) Erstellen Sie den Abschreibungsplan für die ersten 5 Jahre.
   c) Nach 10 Jahren wird für die folgenden 6 Jahre linear bis auf einen Restwert von 606,12 € abgeschrieben. Bestimmen Sie die zugehörige Abschreibungsrate.