MATHEMATIK

17.06.2019

AUFGABEN

1) Berechnen Sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2) Lösen Sie die gegebene Gleichung mit Hilfe der Cramerschen Regel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

GAUßSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN I

Existiert ein **eindeutig lösbares** LGS bestehend aus **n Gleichungen mit m Unbekannten** , so kann Die Lösungsmenge mittels dem **Gauß-Algorithmus** bestimmt werden.

Ziel des Verfahrens ist ein durch **elementare Umformungen** ein gestaffeltes Gleichungssystem (**Stufenstruktur**) zu erhalten, in der die Lösungsmenge einfach bestimmt werden kann.

Methodik (Hinrechnung):

1. Bestimmung der vollbesetzten **Pivotzeile** (nur einmal verwendbar).
2. Durch elementare Umformungen der Pivotzeile und Addition auf alle übrigen m-1 Zeilen muss eine **Variable** (Spalte) komplett **neutralisiert** werden.
3. Es bleiben demzufolge nur noch m-1 Gleichungen mit n-1 Unbekannten übrig, mit denen man wieder beim **ersten Schritt** beginnt.

Methodik (Rückrechnung):

1. Sofern nötig werden die **frei wählbaren Variablen** vorbelegt.
2. Berechnung der 1. Unbekannten in der **kürzesten Stufe**.
3. Einsetzen der 1. Unbekannten in die **nächst höhere Stufe** und Bestimmung der 2. Unbekannten.

GAUßSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN I

<u>Eigenschaften des Gauß Algorithmus:</u>

- ✓ Eine **Pivotzeile** ist eine Gleichung die nur einmalig benutzt werden darf, um eine Variable zu eliminieren. Anschließend darf sie nicht menr „angefasst“ werden.
- ✓ Es dürfen einzelne Gleichungen mit einer Zahl **multipliziert** werden.
- ✓ Nach dem 2. Schritt der Hinrechnung, sollte das entstehende lineare Gleichungssystem vereinfacht (**Sortierung bzw. Ausklammern**) werden.
- ✓ Es dürfen ohne weiteres **parallele Zeilen** miteinander vertauscht werden.
- ✓ Beim **Tausch von Spalten** ist darauf zu achten, dass die Koordinaten des Lösungssystems nun an einer **anderen Position** stehen (durch Markierung kenntlich machen).
- ✓ Das Gauß-Verfahren sollte angewandt werden, sofern entweder **kein quadratisches System** vorhanden ist oder **mindestens eine 4x4-Struktur** vorhanden ist.
- ✓ Sind am Ende des Gauß-Alogithmus **mehr Unbekannte als Gleichungen** vorhanden so werden die Differenz aus Unbekannte-Gleichung als **Parameter** vorbelegt.

GAUßSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN III

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & -1 & -2 & 1 & -4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ \cdot 2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \end{array} \quad \text{Tausch}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \quad \cdot\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_4 & \Rightarrow & x_4 = 0 \\ x_3 = -1 - 3x_4 & \Rightarrow & x_3 = -1 \\ x_2 = -2 - x_4 - 4x_3 & \Rightarrow & x_2 = 2 \\ 2x_1 = 1 - 3x_3 - x_2 & \Rightarrow & x_1 = 1 \end{array}\right\} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem und geben die Lösungsmenge als Vektor an.

a) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -11 \\ -x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & -9 \\ 8x_1 & - & 6x_2 & - & 8x_3 & = & 24 \end{array}\right|$

2) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Matrizengleichung.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

MANNIGFALTIGKEIT

Sofern es sich um ein **lösbares L**GS handelt, kann man aufgrund der letzten Zeile im Gauss Verfahren (**Ergebnis**) Rückschlüsse auf die Mannigfaltigkeit (**Dimension**) der Lösungsmenge machen.

✓ <u>Keine Lösung:</u> $0 = \alpha$

Es entsteht ein **Widerspruch**, wodurch das Gleichungssystem nicht lösbar ist. Graphisch gesehen handelt es sich dadurch um ein **paralleles/ w**indschiefes System.

✓ <u>Eine Lösung:</u> $x_1 = \alpha \wedge x_2 = \beta \wedge x_3 = \gamma \wedge \ldots$

Es entsteht eine **eindeutige** Lösung für jede Variable des Gleichungssystem. Graphisch bedeutet dies, dass ein **Schnittpunkt** existieren muss.

✓ <u>Unendliche Lösungen:</u> $0 = 0$

Es entsteht eine **wahre Aussage** wodurch mind. eine Variable frei wählbar ist. Graphisch bedeutet dies, dass mind. eine **Schnittgerade** entstehen muss.

RANGKRITERIUM VON FROBENIUS I

Jedes LGS kann in eine **Matrizengleichung** $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ umgeformt werden, in der zum einen die **Koeffizientenmatrix** (*A)* und die (mittels Lösungsvektor *b*) **erweiterte Koeffizientenmatrix** (*A*/*b*) vorhanden ist.

Gemäß **Rangkriterium von Frobenius** ist ein Gleichungssystem nur dann lösbar, wenn der Rang der beiden Matrizen gleich ist. Im Fall der **Ungleichheit** ist das System **nicht lösbar.**

$$\boxed{Rang(A) = Rang(A \mid b)}$$

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang(A) = 3$$

$$=$$

$$\det(A \mid b) = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang(A \mid b) = 3$$

Entsteht in der **letzten Zeile** der Koeffizientenmatrix eine Null-Zeile und ist die letzte Koordinate des Lösungsvektors **ungleich Null**, ist das LGS **nicht** lösbar.

RANGKRITERIUM VON FROBENIUS II

Ist ein LGS lösbar, kann die **Lösungsmannigfaltigkeit** durch die Anzahl der **Gleichungen** (*m*), die Anzahl an **Unbekannten** (*n*) und dem Rang der **Koeffizientenmatrix** näher klassifiziert werden:

✓ m > n: *mehr Gleichungen als Unbekannte*

Rang(A) = n	$\longrightarrow$	eindeutige Lösung	
Rang(A) < n	$\longrightarrow$	unendlich viele Lösungen	*(n-Rang(A))-fach*

✓ m < n: *mehr Unbekannte als Gleichungen*

Rang(A) = m	$\longrightarrow$	unendlich viele Lösungen	*(n-m)-fach*
Rang(A) < m	$\longrightarrow$	unendlich viele Lösungen	*(n-Rang(A))-fach*

✓ m = n: *gleiche Anzahl von Gleichungen und Unbekannte*

Rang(A) = n	$\longrightarrow$	eindeutige Lösung $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$	
Rang(A) < n	$\longrightarrow$	unendlich viele Lösungen	*(n-Rang(A))-fach*

RANGKRITERIUM VON FROBENIUS III

Wird das Rangkriterium von Frobenius in einem LGS mit zusätzlichen Parametern angewandt, so wird im ersten Schritt mittels Gauss die Stufenstruktur erzeugt.

Dadurch muss in der letzten Zeile eine Gleichung in der Form $f(\alpha) = g(\beta)$ übrig bleiben, wodurch folgende 3 Fälle zu untersuchen sind:

<u>Fall 1:</u> $0 = 0$

In diesem Fall liefern beide Funktionen eine Null und es entstehen unendliche Lösungen.

<u>Fall 2:</u> $0 = \beta_1$

In dieser Konstellation sind die beiden Ränge verschieden und das LGS ist nicht lösbar.

<u>Fall 3:</u> $\alpha_1 = \beta_1 \vee \alpha_1 = 0$

Hier hat die Koeffinzientenmatrix den Maximalrang und es existiert eine Lösung.

RANGKRITERIUM VON FROBENIUS III

Beispiel: Es ist zu untersuchen, wie die beiden Parameter $\alpha;\beta \in \Re$ zu wählen sind, damit das LGS eine, keine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

$$\left|\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & \alpha\cdot x_2 & + & 2x_3 & = & \beta \end{array}\right| \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 2 & \beta \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\right]\mid\cdot(-2) \\ \left.\right]\mid\cdot(-1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 2+\alpha & -1 & 4+\beta \end{array}\right) \left.\right]\mid\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot(2+\alpha) \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \beta-2\alpha \end{array}\right)$$

- ✓ <u>Eindeutige Lösung:</u>

  $\alpha \neq -1 \rightarrow \det(A) = \det(B) = 5\cdot(\alpha+1) \neq 0 \Rightarrow Rang(A) = 3 = Rang(A\,|\,b)$

- ✓ <u>Keine Lösung:</u>

  $\alpha = -1 \wedge \beta \neq -2 \rightarrow Rang(A) = 2 \neq 3 = Rang(A\,|\,b)$

- ✓ <u>Unendliche Lösungen:</u>

  $\alpha = -1 \wedge \beta = -2 \rightarrow Rang(A) = 2 = Rang(A\,|\,b)$

AUFGABEN

1) Ermitteln Sie mittels Rangkriterium von Frobenius das Lösungsverhalten der folgenden LGS.

a)
$$\left| \begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \right|$$

b)
$$\left| \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & & & & & + & 4x_4 & = & 4 \\ -4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -4 \end{array} \right|$$

2) Entscheiden Sie mittels Ranguntersuchungen (inkl. Begründung), für welche $\alpha; \beta \in Z$ das Gleichungssystem eine, keine bzw. unendlich viele Lösungen hat.

Geben Sie im Fall der unendlichen Lösungen die Geradengleichung an.

$$\left| \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ -x & - & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & \alpha \cdot z & = & \beta \end{array} \right|$$