MATHEMATIK

06.06.2019

WIEDERHOLUNG

Eine Matrix ist eine Kombination aus einer bestimmten Anzahl von _____________, die in Zeilen und Spalten unterteilt sind, die das __________einer Matrix bestimmen, wobei jede die __________jeder Komponente durch die zugehörige Spalte und Zeile bestimmt wird.

Bei der __________der Matrizen unterscheiden wir:

- __________und Subtraktion:

Wenn das Format __________, werden zwei Matrizen zusammengefasst, in dem Sie __________ addieren bzw. subtrahieren.

- __________Multiplikation:

Wenn Sie eine Matrix mit einem Skalar multiplizieren, dann müssen Sie jede _______________mit dieser Zahl multiplizieren.

- __________:

Damit Sie zwei Matrizen miteinander multiplizieren können, müssen die ______ Formatierungen übereinstimmen, d.h. die Anzahl an ___________der ersten Matrix muss gleich mit der Anzahl an _________der zweiten Matrix sein.
Die Berechnung erfolgt dann über das __________Produkt aus Zeilen- und Spaltenvektor.

Um eine Aussage über eine Matrix treffen zu können, berechnen Sie die __________.
Die Berechnung erfolgt bis zu einer __________ mit dem Verfahren von __________, wobei es sich um keine binäre Operation, da aus einer Matrix eine __________Zahl erzeugt wird.
Bei dem Verfahren multiplizieren Sie alle möglichen __________in der rechten Richtung __________ und in der linken Richtung __________und fassen die entstehenden Werte dann zusammen.

Durch die Determinaten können wir zum einen den ______________ einer Matrix (Format der größt möglichen Unterdeterminate) berechnen oder die lineare __________untersuchen.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wann spricht man von einer Matrizengleichung?
- ✓ Was bedeutet die inverse Matrix?
- ✓ Berechnung der inversen Matrix mittels Adjunkten.
- ✓ Berechnung der inversen Matrix mittels elementarer Umformungen.
- ✓ Was ist der Eigenwert einer Matrix?
- ✓ Was versteht man unter der charakteristischen Gleichung?
- ✓ Wie bestimmt man den Eigenvektor?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

Bestimmen Sie die gefragten Werte der folgenden Matrizen:

a) $$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $$Rang\begin{pmatrix} -7 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

c) $$\det\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

MATRIZENGLEICHUNG

Eine Gleichung, in der mindestens eine reelle bzw. komplexe Matrix beteiligt ist, nennt man **Matrizengleichung**, die als Ergebnis entweder einen **Vektor** oder eine **Lösungsmatrix** liefert.

- ✓ Lösungsvektor: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$
- ✓ Lösungsmatrix: $A \cdot X = B$

In beiden Fällen wird A als **Koeffizientenmatrix** bezeichnet.
Um eine solche Gleichung lösen zu können, muss vor dem variablen Vektor/ Matrix die Einheitsmatrix (neutrales Element – Hauptdiagonale = 1 und Rest = 0) erzeugt werden.

Einheitsmatrix im Fall 3x3 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

INVERSE MATRIX I

Aufgrund der Matrizengleichungen muss das System zur Lösung mittels **inverser Matrix** erweitert werden, um die **Einheitsmatrix** zu erzeugen.
Durch die **nicht kommutative** Multiplikation ist darauf zu achten, von **welcher Seite** die Erweiterung erfolgen muss.

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \begin{cases} A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \\ A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B \end{cases}$$

Eine inverse Matrix kann nur dann berechnet werden, wenn es sich zum einen um eine **quadratische Matrix** handelt und zum anderen, wenn sie **regulär**, d.h. linear unabhängig ist.

Die Berechnung erfolgt dann mittels der **Adjunkten**:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}^T ; A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}}$$

INVERSE MATRIX II

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -8 - 12 - (-2 + 12) = -30 \neq 0 \rightarrow (\textit{regulär})$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 20$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ -8 & 6 & 20 \\ 1 & 3 & -10 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 6 & -6 & -3 \\ 10 & -20 & 10 \end{pmatrix}$$

INVERSE MATRIX III

Man kann auch eine inverse Matrix dadurch berechnen, in dem mittels **elementarer Umformungen** die **Einheitsmatrix** von der einen Seite zur anderen Seite des Gleichungssystems überführt.

Beispiel:

$$
\begin{array}{ccc|ccc l}
4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \text{Tausch} \\
2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & |\cdot\frac{1}{2} \\
\hline
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & |\cdot(-3) \quad |\cdot(-4) \\
3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \\
0 & 5 & -3 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & |\cdot\frac{2}{5} \quad |\cdot(-2) \\
0 & 10 & -3 & 1 & 0 & -2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc l}
1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} & \\
0 & 5 & -3 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \\
0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & |\cdot\frac{1}{15} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{30} & \\
0 & 5 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & |\cdot\frac{1}{5} \\
0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & |\cdot\frac{1}{3} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{30} & \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} & A^{-1} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} &
\end{array}
$$

AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die inverse Matrix unter Verwendung von

   a) den Adjunkten

   b) elementarer Umformungen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix}$$

EIGENWERT/ EIGENVEKTOR I

Es wird die Matrizengleichung $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ genauer untersucht.
Eine komplexe Zahl λ heißt **Eigenwert** der quadratischen Matrix *A*, wenn es **Vektoren** mit $x \neq 0$ gibt, die Lösung der obigen Gleichung sind.
Die **Lösungsvektoren** $\vec{x}$ heißen **Eigenvektoren** der Matrix A zum **Eigenwert** λ .

Beispiel:
Die Zahl $\lambda = 1$ ist Eigenwert der Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 1x_2 + 1x_3 \\ x_2 \\ -2x_2 - 1x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2x_1 + x_2 + x_3 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ -2x_2 - x_3 = x_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{vmatrix} \qquad \textit{wähle} \quad x_3 = \alpha \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix}$$

EIGENWERT/ EIGENVEKTOR II

Um die möglichen Eigenwerte einer Matrix bestimmen zu können, nutzt man die sogenannte **Eigenwertgleichung** bzw. **charakteristische Gleichung** von der Matrix *A*.

$$\boxed{\det(A-\lambda E)=0}$$

Es entsteht aufgrund der Gleichung ein Polynom vom Grade n (=Ordnung der Matrix).

Eigenwerte des vorherigen Beispiels:

$$A=\det\left(\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & -2 & -1-\lambda\end{pmatrix}=0$$

$$(-2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=-2\vee\lambda_2=1\vee\lambda_3=-1$$

Daraus ergeben sich folgende **Eigenvektoren**:

$$\lambda_1=-2:\ \overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\qquad\lambda_2=1:\ \overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}0\\ -\alpha\\ \alpha\end{pmatrix}\qquad\lambda_3=\ \overrightarrow{x_3}=\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\\ \alpha\end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor der gegebenen Matrix A in Abhängigkeit zu dem Eigenwert $\lambda = 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie zu der gegebenen Matrix die zugehörigen Eigenwerte und berechnen den jeweiligen Eigenvektor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$