MATHEMATIK

18.05.2018

WIEDERHOLUNG

Den Wert einer Determinante können wir bis zu einem Format von _____ mittels dem Verfahren von Sarrus bestimmen. Für ______Matrizen, die ein höheres Format haben, können wir die Determinante mit dem ____________ __________bestimmen. Dazu sollten Sie im ersten Schritt durch ____________Umformungen so viele __________als möglich in eine Zeile oder Spalte der Matrix erzeugen.
Anschließend bewegen Sie sich in dieser Zeile oder Spalte von ____________ ___ ____________ und berechnen jeweils das Produkt aus der Komponente wo Sie gerade stehen und der zugehörigen ____________.
Eine Adjunkte ist nichts anderes als eine anhand der ____________bewertete ______________, d.h. Sie ____________zu der Stelle, wo Sie gerade stehen, die Zeile und die Spalte.
Dann addieren Sie die Koordinaten der Position. Ist das Ergebnis eine gerade Zahl, so ist die Bewertung ____________und im Falle einer ungeraden Zahl ist sie ____________.
Jetzt können Sie den Wert der durch die Streichung der Zeile/ Spalte entstandenen ______________ bestimmen und erhalten durch Multiplikation der Bewertung und der Determinate den Wert der ____________. Nachdem wir abschließend jede entstanden Adjunkte mit dem dazugehörenden ____________der Matrix multipliziert haben und dann alle diese Zahlen ____________entsteht automatisch der Wert der Determinaten.
Für Matrizen mit einem Format von größer als _____ist dies Verfahren sehr rechenintensiv, so dass wir den Wert der Determinante auch dadurch erhalten, in dem Sie durch ____________ Umformungen die ____________bestimmen. Die Determinante ergibt sich dann durch das Produkt der ____________.
Zur Lösung einer Matrizengleichung müssen wir die sogenannte ______________Matrix berechnen. Bei der anschließenden Multiplikation müssen Sie darauf achten von welcher Seite Sie die störende Matrix beseitigen wollen, da diese Art der Multiplikation ______ ____________ist.
Die inverse Matrix kann nur gebildet werden, wenn sie __________ist, also einen Determinatenwert hat, der ungleich Null ist. Die Berechnung erfolgt ebenfalls über die ____________.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wie ist ein Gleichungssystem aufgebaut?
- ✓ Wie kann man die Lösungsmenge graphisch interpretieren?
- ✓ Was ist das Additions- / Einsetzungs- / Gleichsetzungsverfahren?
- ✓ Wie löst man ein Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren?
- ✓ Was bedeutet die Lösungsmannigfaltigkeit eines Gleichungssystems?
- ✓ Was ist der Rang eines LGS?
- ✓ Was ist das Rangkriterium von Fobenius?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Gegeben ist die folgende Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ -1 & 2 & x \end{pmatrix}$

Für welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ existiert die inverse Matrix zu A (Begründung)
Bestimmen Sie für $x = -3$ und den Vektor $\vec{b} = (1; 1; -3)^T$ die Lösung der Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit einer Methode Ihrer Wahl

2) Bestimmen Sie die inverse Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) Bestimmen Sie die Eigenwerte und auch Die Eigenvektoren der Matrix. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM I

Bei einem **LGS** (Lineares Gleichungssytem) müssen stets alle **m Gleichungen** mit ihren **n Unbekannten** gleichzeitig erfüllt sein. Die allgemeine Form lautet:

$$
\left.
\underbrace{\left|\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\
a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & \dots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\
 & & & & \dots & & & & \\
a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & \dots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m
\end{array}\right|}_{\text{n-Unbekannte}}
\right\} \text{m-Gleichungen}
$$

Eine LGS besteht somit aus folgenden **Komponenten**:

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\text{Koeffizientenmatrix} & A_{m,n} = (a_{ij}) \in \Re \\
\text{Lösungsvektor} & b_{m,1} = (b_1, \dots, b_m)^T \in \Re^m \\
\text{Suchvektor} & x_{n,1} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \Re^n
\end{array}
\right\} \quad L = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A \cdot \vec{x} = \vec{b}\}
$$

LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM II

Allgemeine **Eigenschaften** eines LGS:

- ✓ Zwei Gleichungssysteme sind **äquivalent**, wenn ihre Lösungsmengen identisch sind.
- ✓ Ist der Vektor $\vec{b} \neq 0$, dann ist das Gleichungssystem **inhomogen**, anderenfalls $(\vec{b} \neq 0)$ **homogen**.

<u>Graphische Interpretation:</u>

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & = & b_2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall wird der **Schnittpunkt zweier Geraden** bestimmt und in der Form $(x_1; x_2)^T$ angegeben.
Als Verfahren bieten sich die folgenden an:

- ✓ Einsetzungsverfahren
- ✓ Gleichsetzungsverfahren
- ✓ Additionsverfahren

Handelt es sich um **3 Gleichungen mit 3 Unbekannten**, so wird der Schnittpunkt dreier Ebenen gesucht.

Sind es 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten, so handelt es sich um die **Schnittgerade** zweier Ebenen.

CRAMERSCHE REGEL I

Existiert ein **eindeutig lösbares** LGS bestehend aus **n Gleichungen mit n Unbekannten** , so kann der Lösungsvektor mittels Cramer-Verfahren berechnet werden.

Die Lösungsmenge beschreibt aufgrund der Eindeutigkeit stets einen Schnittpunkt.

Es gilt: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{1}{det(A)} \cdot \left(adj(A)\right)^T \cdot \vec{b}; det(A) \neq 0$

$$\boxed{\Rightarrow x_k = \frac{D_{ik}}{D}; k = 1;2;\ldots;n}$$

<u>Methodik:</u>

- ✓ Bestimmung der Determinanten der **Koeffizientenmatrix**.
- ✓ **Ersetzung** der k-ten Spalte durch den **Lösungsvektor**.
- ✓ Berechnung der **Determinanten** der neu entstandenen Matrix.
- ✓ Durch **Quotienten-Bildung** erhält man die entsprechende Koordinate des Lösungsvektors.

Für n>3 (mind. 4 Gleichungen) ist der Rechenaufwand aufgrund der Determinantenberechung zu groß um die Cramersche Regel anzuwenden.

CRAMERSCHE REGEL II

Beispiel:

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & \boxed{9} \\ x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & \boxed{-10} \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & \boxed{12} \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} (12 & + & 120 & + & 2) \\ & & - & & \\ (6 & - & 16 & - & 30) \end{array} = 174 \neq 0 \rightarrow (\mathit{regulär})$$

$$D_1 = \det A_1 = \begin{vmatrix} \boxed{9} & -4 & 1 \\ \boxed{-10} & 1 & -5 \\ \boxed{12} & 2 & 4 \end{vmatrix} = 174 \Rightarrow x_1 = \frac{D_1}{D} = 1$$

$$D_2 = \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & \boxed{9} & 1 \\ 1 & \boxed{-10} & -5 \\ 6 & \boxed{12} & 4 \end{vmatrix} = -174 \Rightarrow x_2 = \frac{D_2}{D} = -1$$

$$D_3 = \det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & \boxed{9} \\ 1 & 1 & \boxed{-10} \\ 6 & 2 & \boxed{12} \end{vmatrix} = 348 \Rightarrow x_3 = \frac{D_3}{D} = 2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem, in dem Sie insgesamt alle 3 Verfahren anwenden.

a) $$\left|\begin{array}{l} 3y-2x=13 \\ 8x+4y=-4 \end{array}\right|$$

b) $$\left|\begin{array}{c} 2y=1-0{,}5x \\ 0{,}25x=0{,}6-y \end{array}\right|$$

c) $$\left|\begin{array}{c} \frac{1}{3}y+\frac{1}{6}x=\frac{1}{15} \\ \frac{3}{2}x=\frac{3}{5}-3y \end{array}\right|$$

2) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden LGS mittels der Cramerschen Regel.

$$\left|\begin{array}{c} x-3y+z=-2 \\ -x+2y-3z=-6 \\ 2x+y+4z=16 \end{array}\right|$$

GAUßSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN I

Existiert ein **eindeutig lösbares** LGS bestehend aus **n Gleichungen mit m Unbekannten** , so kann Die Lösungsmenge mittels dem **Gauß-Algorithmus** bestimmt werden.

Ziel des Verfahrens ist ein durch **elementare Umformungen** ein gestaffeltes Gleichungssystem (**Stufenstruktur**) zu erhalten, in der die Lösungsmenge einfach bestimmt werden kann.

Methodik (Hinrechnung):

1. Bestimmung der vollbesetzten **Pivotzeile** (nur einmal verwendbar).
2. Durch elementare Umformungen der Pivotzeile und Addition auf alle übrigen m-1 Zeilen muss eine **Variable** (Spalte) komplett **neutralisiert** werden.
3. Es bleiben demzufolge nur noch m-1 Gleichungen mit n-1 Unbekannten übrig, mit denen man wieder beim **ersten Schritt** beginnt.

Methodik (Rückrechnung):

1. Sofern nötig werden die **frei wählbaren Variablen** vorbelegt.
2. Berechnung der 1. Unbekannten in der **kürzesten Stufe**.
3. Einsetzen der 1. Unbekannten in die **nächst höhere Stufe** und Bestimmung der 2. Unbekannten.

GAUßSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN I

<u>Eigenschaften des Gauß Algorithmus:</u>

- ✓ Eine **Pivotzeile** ist eine Gleichung die nur einmalig benutzt werden darf, um eine Variable zu eliminieren. Anschließend darf sie nicht menr „angefasst“ werden.
- ✓ Es dürfen einzelne Gleichungen mit einer Zahl **multipliziert** werden.
- ✓ Nach dem 2. Schritt der Hinrechnung, sollte das entstehende lineare Gleichungssystem vereinfacht (**Sortierung bzw. Ausklammern**) werden.
- ✓ Es dürfen ohne weiteres **parallele Zeilen** miteinander vertauscht werden.
- ✓ Beim **Tausch von Spalten** ist darauf zu achten, dass die Koordinaten des Lösungssystems nun an einer **anderen Position** stehen (durch Markierung kenntlich machen).
- ✓ Das Gauß-Verfahren sollte angewandt werden, sofern entweder **kein quadratisches System** vorhanden ist oder **mindestens eine 4x4-Struktur** vorhanden ist.
- ✓ Sind am Ende des Gauß-Alogithmus **mehr Unbekannte als Gleichungen** vorhanden so werden die Differenz aus Unbekannte-Gleichung als **Parameter** vorbelegt.

Gaußsches Eliminationsverfahren III

<u>Beispiel:</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ \cdot 2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right) \cdot 2 \quad \text{Tausch}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_4 & \Rightarrow & x_4 = 0 \\ x_3 = -1 - 3x_4 & \Rightarrow & x_3 = -1 \\ x_2 = -2 - x_4 - 4x_3 & \Rightarrow & x_2 = 2 \\ 2x_1 = 1 - 3x_3 - x_2 & \Rightarrow & x_1 = 1 \end{array}\right\} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem und geben die Lösungsmenge als Vektor an.

a) $$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right|$$

b) $$\left|\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -11 \\ -x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & -9 \\ 8x_1 & - & 6x_2 & - & 8x_3 & = & 24 \end{array}\right|$$

2) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Matrizengleichung.

a) $$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

MANNIGFALTIGKEIT

Sofern es sich um ein **lösbares L**GS handelt, kann man aufgrund der letzten Zeile im Gauss Verfahren (**Ergebnis**) Rückschlüsse auf die Mannigfaltigkeit (**Dimension**) der Lösungsmenge machen.

- ✓ <u>Keine Lösung:</u> $0 = \alpha$

  Es entsteht ein **Widerspruch**, wodurch das Gleichungssystem nicht lösbar ist. Graphisch gesehen handelt es sich dadurch um ein **paralleles/ w**indschiefes System.

- ✓ <u>Eine Lösung:</u> $x_1 = \alpha \wedge x_2 = \beta \wedge x_3 = \gamma \wedge \ldots$

  Es entsteht eine **eindeutige** Lösung für jede Variable des Gleichungssystem. Graphisch bedeutet dies, dass ein **Schnittpunkt** existieren muss.

- ✓ <u>Unendliche Lösungen:</u> $0 = 0$

  Es entsteht eine **wahre Aussage** wodurch mind. eine Variable frei wählbar ist. Graphisch bedeutet dies, dass mind. eine **Schnittgerade** entstehen muss.

RANGKRITERIUM VON FROBENIUS I

Jedes LGS kann in eine **Matrizengleichung** $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ umgeformt werden, in der zum einen die **Koeffizientenmatrix** (*A)* und die (mittels Lösungsvektor *b*) **erweiterte Koeffizientenmatrix** (*A*/*b*) vorhanden ist.

Gemäß **Rangkriterium von Frobenius** ist ein Gleichungssystem nur dann lösbar, wenn der Rang der beiden Matrizen gleich ist. Im Fall der **Ungleichheit** ist das System **nicht lösbar.**

$$\boxed{Rang(A) = Rang(A \mid b)}$$

<u>Beispiel:</u> $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang(A) = 3$$

$$=$$

$$\det(A \mid b) = -3 \neq 0 \Rightarrow Rang(A \mid b) = 3$$

Entsteht in der **letzten Zeile** der Koeffizientenmatrix eine Null-Zeile und ist die letzte Koordinate des Lösungsvektors **ungleich Null**, ist das LGS **nicht** lösbar.

RANGKRITERIUM VON FROBENIUS II

Ist ein LGS lösbar, kann die **Lösungsmannigfaltigkeit** durch die Anzahl der **Gleichungen** (*m*), die Anzahl an **Unbekannten** (*n*) und dem Rang der **Koeffizientenmatrix** näher klassifiziert werden:

✓ m > n: *mehr Gleichungen als Unbekannte*

Rang(A) = n	⟶	eindeutige Lösung	
Rang(A) < n	⟶	unendlich viele Lösungen	*(n-Rang(A))-fach*

✓ m < n: *mehr Unbekannte als Gleichungen*

Rang(A) = m	⟶	unendlich viele Lösungen	*(n-m)-fach*
Rang(A) < m	⟶	unendlich viele Lösungen	*(n-Rang(A))-fach*

✓ m = n: *gleiche Anzahl von Gleichungen und Unbekannte*

Rang(A) = n	⟶	eindeutige Lösung $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$	
Rang(A) < n	⟶	unendlich viele Lösungen	*(n-Rang(A))-fach*

RANGKRITERIUM VON FROBENIUS III

Wird das Rangkriterium von Frobenius in einem LGS mit zusätzlichen Parametern angewandt, so wird im ersten Schritt mittels Gauss die Stufenstruktur erzeugt.

Dadurch muss in der letzten Zeile eine Gleichung in der Form $f(\alpha) = g(\beta)$ übrig bleiben, wodurch folgende 3 Fälle zu untersuchen sind:

Fall 1: $0 = 0$

In diesem Fall liefern beide Funktionen eine Null und es entstehen unendliche Lösungen.

Fall 2: $0 = \beta_1$

In dieser Konstellation sind die beiden Ränge verschieden und das LGS ist nicht lösbar.

Fall 3: $\alpha_1 = \beta_1 \vee \alpha_1 = 0$

Hier hat die Koeffinzientenmatrix den Maximalrang und es existiert eine Lösung.

RANGKRITERIUM VON FROBENIUS III

Beispiel: Es ist zu untersuchen, wie die beiden Parameter $\alpha;\beta \in \Re$ zu wählen sind, damit das LGS eine, keine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

$$\left| \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & \alpha \cdot x_2 & + & 2x_3 & = & \beta \end{array} \right| \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 2 & \beta \end{array} \right) \begin{array}{l} \left.\right] \mid \cdot(-2) \\ \left.\right] \mid \cdot(-1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 2+\alpha & -1 & 4+\beta \end{array} \right) \left.\right] \mid \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (2+\alpha) \qquad \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \beta-2\alpha \end{array} \right)$$

✓ <u>Eindeutige Lösung:</u>

$$\alpha \neq -1 \rightarrow \det(A) = \det(B) = 5 \cdot (\alpha+1) \neq 0 \Rightarrow Rang(A) = 3 = Rang(A \mid b)$$

✓ <u>Keine Lösung:</u>

$$\alpha = -1 \wedge \beta \neq -2 \rightarrow Rang(A) = 2 \neq 3 = Rang(A \mid b)$$

✓ <u>Unendliche Lösungen:</u>

$$\alpha = -1 \wedge \beta = -2 \rightarrow Rang(A) = 2 = Rang(A \mid b)$$

AUFGABEN

1) Ermitteln Sie mittels Rangkriterium von Frobenius das Lösungsverhalten der folgenden LGS.

a) $$\left| \begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \right|$$

b) $$\left| \begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & & & & & + & 4x_4 & = & 4 \\ -4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -4 \end{array} \right|$$

2) Entscheiden Sie mittels Ranguntersuchungen (inkl. Begründung), für welche $\alpha;\beta \in Z$ das Gleichungssystem eine, keine bzw. unendlich viele Lösungen hat.

Geben Sie im Fall der unendlichen Lösungen die Geradengleichung an.

$$\left| \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 \\ -x & - & y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & + & y & + & \alpha \cdot z & = & \beta \end{array} \right|$$