

MATHEMATIK

03.06.2019

AUFGABEN

Vereinfachen Sie die gegebenen Matrixausdrücke soweit als möglich:

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Determinantenwert der gegebenen Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 10 & 4 & -6 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ANWENDUNG DETERMINANTE I

Unterdeterminante:

Liegt keine rein quadratische Matrix vor, so kann eine Unterdeterminante gebildet bzw. berechnet werden.

Rang einer Matrix:

Unter dem Rang einer Matrix versteht man das Format der größtmöglichen Determinanten bzw. Unterdeterminanten, die ungleich Null ist.

Beispiel:

$$\text{Rg} \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (8+0+1) - (-6+0+8) = 7$$

Es handelt sich bei der Matrix um ein (3,5) – System, das als Rang max. 3 besitzen könnte. Da die grün umrahmte Unterdeterminante ungleich Null ist wird der Rang 3 bestätigt.

ANWENDUNG DETERMINANTE II

Mittels der Determinanten einer Matrix kann u.a. auch die **lineare (Un) Abhängigkeit** untersucht werden, d.h. ist der Determinantenwert ungleich Null sind die darin enthaltenen **Vektoren** linear unabhängig (anderenfalls linear abhängig)

regulär:

Eine Matrix deren Vektoren linear unabhängig sind, ist **regulär** mit $\text{Det}(A) \neq 0$.

singulär:

Eine Matrix deren Vektoren linear abhängig sind, ist **singulär** mit $\text{Det}(A)=0$.

Beispiel:

Bilden die folgenden 3 Vektoren eine Basis?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (18+12+2) \\ - \\ (-18-6+4) \end{matrix} = 32 + 20 = 52 \neq 0$$

Da der Determinantenwert ungleich Null ist, handelt es sich um eine reguläre Matrix und das System besteht aus linear unabhängigen Vektoren, die somit eine Basis bilden.

GESETZE

- 1) Für die Determinante der transponierten Matrix einer Matrix gilt: $\det A = \det A^T$
- 2) Das Vertauschen von parallelen Zeilen/ Spalten ändert das Vorzeichen.
- 3) Multiplikation einer Determinanten mit einem Skalar wird durch die Veränderung einer beliebigen Zeile oder Spalte durchgeführt (kürzen).
- 4) Sind in einer Matrix zwei Zeilen/ zwei Spalten linear abhängig, so ist die Determinante Null.
- 5) Addition eines Vielfachen der Elemente einer Reihe zu einer parallelen Reihe ändert den Determinantenwert nicht.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = 2 \cdot [(0 + 9 + 2) - (-18 + 0 + 3)] = 2 \cdot (11 + 15) = 52$$

AUFGABEN

Bestimmen Sie die gefragten Werte der folgenden Matrizen:

$$\text{a) } \det \begin{pmatrix} 2i-3 & 3i-5 & 3-i \\ 3i & 4i & -3 \\ i-4 & -1+2i & 2+i \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \det \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

LAPLACESCHER ENTWICKLUNGSSATZ I

Für quadratische Matrizen mit einer **Ordnung** > 3 wird die Determinanten mittels der sogenannten **Adjunkten** berechnet. Es handelt sich dabei um eine **Unterdeterminante**, die durch **Streichung** der i -ten Zeile und j -ten Spalte gebildet wird und anhand der **Position** mit $+$ oder $-$ **bewertet** wird.

Adjunkte:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Methodik Laplace:

1. Mittels elementarer Umformungen möglichst häufig die 0 in Zeile/ Spalte erzeugen.
2. Die Entwicklung der Determinante basiert darauf innerhalb einer Zeile/ Spalte jedes Element daraus mit der zugehörigen Adjunkten zu multiplizieren und abschließend diese Produkte zu summieren.

$$\begin{array}{ccc} \det A^{>3} & & \\ \swarrow \text{\textit{i-ten Zeile}} & & \searrow \text{\textit{j-ten Spalte}} \\ \boxed{\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}} & & \boxed{\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}} \end{array}$$

LAPLACESCHER ENTWICKLUNGSSATZ II

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 12 & 8 \\ 2 & 6 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

gemeinsamer Faktor 4
Zeile 1 } +
Zeile 2 }
Spalte 3 } -
Spalte 2 }

Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det A = 4 \cdot [0 \cdot A_{11} + 8 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 6 \cdot A_{14}] = 4 \cdot [8 \cdot (-1)^{1+2} \cdot D_{12} + 6 \cdot (-1)^{1+4} \cdot D_{14}]$$

$$\det A = -32 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} - 24 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\det A = -32 \cdot [(-9 - 12 + 24) - (18 + 12 + 12)] - 24 \cdot [(-36 + 9 + 4) - (36 + 12 - 3)]$$

$$\det A = -32 \cdot (3 - 42) - 24 \cdot (-23 - 45) = 1248 + 1632 = 2880$$

AUFGABEN

1) Wie muss x gewählt werden, damit folgende Gleichung erfüllt ist?

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2) Bestimmen Sie mittels Laplaceschem Entwicklungssatz den Wert der folgenden Determinanten.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1+i & 0 \\ 1+i & 1 & 0 & 1-i \\ 0 & -1 & 2+i & -2 \\ -1 & -1+i & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3) Gesucht ist der Parameter a , so dass der Punkt Q in der Ebene liegt.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}; e: \vec{x} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$