MATHEMATIK

02.06.2017

WIEDERHOLUNG

Den Wert einer Determinante können wir bis zu einem Format von _____ mittels dem Verfahren von Sarrus bestimmen. Für ______Matrizen, die ein höheres Format haben, können wir die Determinante mit dem ____________ __________bestimmen.

Dazu sollten Sie im ersten Schritt durch ____________Umformungen so viele __________als möglich in eine Zeile oder Spalte der Matrix erzeugen.

Anschließend bewegen Sie sich in dieser Zeile oder Spalte von ____________ ___ ____________ und berechnen jeweils das Produkt aus der Komponente wo Sie gerade stehen und der zugehörigen ____________.

Eine Adjunkte ist nichts anderes als eine anhand der ____________bewertete ______________, d.h. Sie ____________zu der Stelle, wo Sie gerade stehen, die Zeile und die Spalte.

Dann addieren Sie die Koordinaten der Position. Ist das Ergebnis eine gerade Zahl, so ist die Bewertung ____________und im Falle einer ungeraden Zahl ist sie ____________.

Jetzt können Sie den Wert der durch die Streichung der Zeile/ Spalte entstandenen ______________ bestimmen und erhalten durch Multiplikation der Bewertung und der Determinate den Wert der ____________. Nachdem wir abschließend jede entstanden Adjunkte mit dem dazugehörenden ____________der Matrix multipliziert haben und dann alle diese Zahlen ____________entsteht automatisch der Wert der Determinaten.

Für Matrizen mit einem Format von größer als _____ist dies Verfahren sehr rechenintensiv, so dass wir den Wert der Determinante auch dadurch erhalten, in dem Sie durch ____________ Umformungen die ____________bestimmen. Die Determinante ergibt sich dann durch das Produkt der ____________.

Zur Lösung einer Matrizengleichung müssen wir die sogenannte ______________Matrix berechnen. Bei der anschließenden Multiplikation müssen Sie darauf achten von welcher Seite Sie die störende Matrix beseitigen wollen, da diese Art der Multiplikation ______ ____________ist.

Die inverse Matrix kann nur gebildet werden, wenn sie __________ist, also einen Determinatenwert hat, der ungleich Null ist. Die Berechnung erfolgt ebenfalls über die ____________.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wie ist ein Gleichungssystem aufgebaut?
- ✓ Wie kann man die Lösungsmenge graphisch interpretieren?
- ✓ Was ist das Additions- / Einsetzungs- / Gleichsetzungsverfahren?
- ✓ Wie löst man ein Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren?
- ✓ Was bedeutet die Lösungsmannigfaltigkeit eines Gleichungssystems?
- ✓ Was ist der Rang eines LGS?
- ✓ Was ist das Rangkriterium von Fobenius?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Gegeben ist die folgende Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & x & 3 \\ -1 & 2 & x \end{pmatrix}$

Für welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ existiert die inverse Matrix zu A (Begründung)
Bestimmen Sie für $x = -3$ und den Vektor $\vec{b} = (1; 1; -3)^T$ die Lösung der Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit einer Methode Ihrer Wahl

2) Bestimmen Sie die inverse Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) Bestimmen Sie die Eigenwerte und auch Die Eigenvektoren der Matrix. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM I

Bei einem **LGS** (Lineares Gleichungssytem) müssen stets alle **m Gleichungen** mit ihren **n Unbekannten** gleichzeitig erfüllt sein. Die allgemeine Form lautet:

$$\left.\underbrace{\left|\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\ & & & & \dots & & & & \\ a_{m1}\cdot x_1 & + & a_{m2}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{mn}\cdot x_n & = & b_m \end{array}\right|}_{\text{n-Unbekannte}}\right\} \text{m-Gleichungen}$$

Eine LGS besteht somit aus folgenden **Komponenten**:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Koeffizientenmatrix} & A_{m,n} = (a_{ij}) \in \Re \\ \text{Lösungsvektor} & b_{m,1} = (b_1,\dots,b_m)^T \in \Re^m \\ \text{Suchvektor} & x_{n,1} = (x_1,\dots,x_n)^T \in \Re^n \end{array}\right\} \quad \boxed{L = \left\{\vec{x} \in \Re^n \mid A\cdot\vec{x} = \vec{b}\right\}}$$

LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM II

Allgemeine **Eigenschaften** eines LGS:

- ✓ Zwei Gleichungssysteme sind **äquivalent**, wenn ihre Lösungsmengen identisch sind.
- ✓ Ist der Vektor $\vec{b} \neq 0$, dann ist das Gleichungssystem **inhomogen**, anderenfalls $\left(\vec{b} = 0\right)$ **homogen**.

<u>Graphische Interpretation:</u>

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & = & b_2 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall wird der **Schnittpunkt zweier Geraden** bestimmt und in der Form $(x_1; x_2)^T$ angegeben.
Als Verfahren bieten sich die folgenden an:

- ✓ Einsetzungsverfahren
- ✓ Gleichsetzungsverfahren
- ✓ Additionsverfahren

Handelt es sich um **3 Gleichungen mit 3 Unbekannten**, so wird der Schnittpunkt dreier Ebenen gesucht.

Sind es 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten, so handelt es sich um die **Schnittgerade** zweier Ebenen.

CRAMERSCHE REGEL I

Existiert ein **eindeutig lösbares** LGS bestehend aus **n Gleichungen mit n Unbekannten** , so kann der Lösungsvektor mittels Cramer-Verfahren berechnet werden.

Die Lösungsmenge beschreibt aufgrund der Eindeutigkeit stets einen Schnittpunkt.

Es gilt:
$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(adj(A)\right)^T \cdot \vec{b}; \det A \neq 0$$

$$\boxed{\Rightarrow x_k = \frac{D_{ik}}{D}; k = 1;2;\ldots;n}$$

<u>Methodik:</u>

- ✓ Bestimmung der Determinanten der **Koeffizientenmatrix**.
- ✓ **Ersetzung** der k-ten Spalte durch den **Lösungsvektor**.
- ✓ Berechnung der **Determinanten** der neu entstandenen Matrix.
- ✓ Durch **Quotienten-Bildung** erhält man die entsprechende Koordinate des Lösungsvektors.

Für n>3 (mind. 4 Gleichungen) ist der Rechenaufwand aufgrund der Determinantenberechung zu groß um die Cramersche Regel anzuwenden.

CRAMERSCHE REGEL II

Beispiel:

$$\left| \begin{array}{ccccccc} 3x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & \boxed{9} \\ x_1 & + & x_2 & - & 5x_3 & = & \boxed{-10} \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & \boxed{12} \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{array}{ccccc} (12 & + & 120 & + & 2) \\ & & - & & \\ (6 & - & 16 & - & 30) \end{array} = 174 \neq 0 \rightarrow (\mathit{regulär})$$

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = \det A_1 = \begin{vmatrix} \boxed{9} & -4 & 1 \\ \boxed{-10} & 1 & -5 \\ \boxed{12} & 2 & 4 \end{vmatrix} = 174 \Rightarrow x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 1 \\ D_2 = \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & \boxed{9} & 1 \\ 1 & \boxed{-10} & -5 \\ 6 & \boxed{12} & 4 \end{vmatrix} = -174 \Rightarrow x_2 = \dfrac{D_2}{D} = -1 \\ D_3 = \det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & \boxed{9} \\ 1 & 1 & \boxed{-10} \\ 6 & 2 & \boxed{12} \end{vmatrix} = 348 \Rightarrow x_3 = \dfrac{D_3}{D} = 2 \end{array}\right\} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem, in dem Sie insgesamt alle 3 Verfahren anwenden.

a) $\left| \begin{array}{l} 3y - 2x = 13 \\ 8x + 4y = -4 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{r} 2y = 1 - 0{,}5x \\ 0{,}25x = 0{,}6 - y \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{2}x = \frac{3}{5} - 3y \end{array} \right|$

2) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden LGS mittels der Cramerschen Regel.

$$\left| \begin{array}{r} x - 3y + z = -2 \\ -x + 2y - 3z = -6 \\ 2x + y + 4z = 16 \end{array} \right|$$