

# MATHEMATIK

**29.05.2017**

# WIEDERHOLUNG

Eine Matrix ist eine Kombination aus einer bestimmten Anzahl von \_\_\_\_\_, die in Zeilen und Spalten unterteilt sind, die das \_\_\_\_\_ einer Matrix bestimmen, wobei jede die \_\_\_\_\_ jeder Komponente durch die zugehörige Spalte und Zeile bestimmt wird.

Bei der \_\_\_\_\_ der Matrizen unterscheiden wir:

- \_\_\_\_\_ und Subtraktion:

Wenn das Format \_\_\_\_\_, werden zwei Matrizen zusammengefasst, in dem Sie \_\_\_\_\_ addieren bzw. subtrahieren.

- \_\_\_\_\_ Multiplikation:

Wenn Sie eine Matrix mit einem Skalar multiplizieren, dann müssen Sie jede \_\_\_\_\_ mit dieser Zahl multiplizieren.

- \_\_\_\_\_:

Damit Sie zwei Matrizen miteinander multiplizieren können, müssen die \_\_\_\_\_ Formatierungen übereinstimmen, d.h. die Anzahl an \_\_\_\_\_ der ersten Matrix muss gleich mit der Anzahl an \_\_\_\_\_ der zweiten Matrix sein.

Die Berechnung erfolgt dann über das \_\_\_\_\_ Produkt aus Zeilen- und Spaltenvektor.

Um eine Aussage über eine Matrix treffen zu können, berechnen Sie die \_\_\_\_\_.

Die Berechnung erfolgt bis zu einer \_\_\_\_\_ mit dem Verfahren von \_\_\_\_\_, wobei es sich um keine binäre Operation, da aus einer Matrix eine \_\_\_\_\_ Zahl erzeugt wird.

Bei dem Verfahren multiplizieren Sie alle möglichen \_\_\_\_\_ in der rechten Richtung \_\_\_\_\_ und in der linken Richtung \_\_\_\_\_ und fassen die entstehenden Werte dann zusammen.

Durch die Determinanten können wir zum einen den \_\_\_\_\_ einer Matrix (Format der größt möglichen Unterdeterminante) berechnen oder die lineare \_\_\_\_\_ untersuchen.

# ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wann spricht man von einer Matrixgleichung?
- ✓ Was bedeutet die inverse Matrix?
- ✓ Berechnung der inversen Matrix mittels Adjunkten.
- ✓ Berechnung der inversen Matrix mittels elementarer Umformungen.
- ✓ Was ist der Eigenwert einer Matrix?
- ✓ Was versteht man unter der charakteristischen Gleichung?
- ✓ Wie bestimmt man den Eigenvektor?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

# AUFGABEN

Bestimmen Sie die gefragten Werte der folgenden Matrizen:

$$\text{a) } \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \text{Rang} \begin{pmatrix} -7 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \det \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

# MATRIZENGLEICHUNG

Eine Gleichung, in der mindestens eine reelle bzw. komplexe Matrix beteiligt ist, nennt man **Matrizengleichung**, die als Ergebnis entweder einen **Vektor** oder eine **Lösungsmatrix** liefert.

✓ Lösungsvektor:  $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

✓ Lösungsmatrix:  $A \cdot X = B$

In beiden Fällen wird A als **Koeffizientenmatrix** bezeichnet.

Um eine solche Gleichung lösen zu können, muss vor dem variablen Vektor/ Matrix die Einheitsmatrix (neutrales Element – Hauptdiagonale = 1 und Rest = 0) erzeugt werden.

Einheitsmatrix im Fall 3x3  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

# INVERSE MATRIX I

Aufgrund der Matrixgleichungen muss das System zur Lösung mittels **inverser Matrix** erweitert werden, um die **Einheitsmatrix** zu erzeugen.

Durch die **nicht kommutative** Multiplikation ist darauf zu achten, von **welcher Seite** die Erweiterung erfolgen muss.

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \left\{ \begin{array}{l} A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \\ A \cdot X = B \Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B \end{array} \right.$$

Eine inverse Matrix kann nur dann berechnet werden, wenn es sich zum einen um eine **quadratische Matrix** handelt und zum anderen, wenn sie **regulär**, d.h. linear unabhängig ist.

Die Berechnung erfolgt dann mittels der **Adjunkten**:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}^T ; A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

# INVERSE MATRIX II

Beispiel:  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -8 - 12 - (-2 + 12) = -30 \neq 0 \rightarrow (\text{regulär})$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \quad A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -8 \quad A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 20$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -6 & -10 \\ -8 & 6 & 20 \\ 1 & 3 & -10 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 6 & -6 & -3 \\ 10 & -20 & 10 \end{pmatrix}$$

# INVERSE MATRIX III

Man kann auch eine inverse Matrix dadurch berechnen, in dem mittels **elementarer Umformungen** die **Einheitsmatrix** von der einen Seite zur anderen Seite des Gleichungssystems überführt.

Beispiel:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
 0 & 5 & -3 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\
 0 & 10 & -3 & 1 & 0 & -2
 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Row 1} \\ \text{Row 2} \\ \text{Row 3} \end{array} \right\} \text{Tausch}$   
 $\left. \begin{array}{l} \text{Row 2} \\ \text{Row 3} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} | \cdot (-3) \\ | \cdot (-4) \end{array} \right\}$   
 $\left. \begin{array}{l} \text{Row 2} \\ \text{Row 3} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} | \cdot \frac{2}{5} \\ | \cdot (-2) \end{array} \right\}$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\
 0 & 5 & -3 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\
 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{30} \\
 0 & 5 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\
 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{30} \\
 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\
 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}
 \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Row 1} \\ \text{Row 2} \\ \text{Row 3} \end{array} \right\} | \cdot \frac{1}{15}$   
 $\left. \begin{array}{l} \text{Row 2} \\ \text{Row 3} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} | \cdot \frac{1}{5} \\ | \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right\}$   
 $\left. \begin{array}{l} \text{Row 1} \\ \text{Row 2} \\ \text{Row 3} \end{array} \right\} A^{-1}$



# AUFGABEN

1) Bestimmen Sie die inverse Matrix unter Verwendung von

a) den Adjunkten

b) elementarer Umformungen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Lösen Sie die folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix}$$

# EIGENWERT/ EIGENVEKTOR I

Es wird die Matrixgleichung  $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$  genauer untersucht.

Eine komplexe Zahl  $\lambda$  heißt **Eigenwert** der quadratischen Matrix  $A$ , wenn es **Vektoren** mit  $x \neq 0$  gibt, die Lösung der obigen Gleichung sind.

Die **Lösungsvektoren**  $\vec{x}$  heißen **Eigenvektoren** der Matrix  $A$  zum **Eigenwert**  $\lambda$ .

Beispiel:  
Die Zahl  $\lambda = 1$  ist Eigenwert der Matrix  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + 1x_2 + 1x_3 \\ x_2 \\ -2x_2 - 1x_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 + x_3 = x_1 \\ x_2 = x_2 \\ -2x_2 - x_3 = x_3 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{array} \right| \quad \text{wähle } x_3 = \alpha \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

# EIGENWERT/ EIGENVEKTOR II

Um die möglichen Eigenwerte einer Matrix bestimmen zu können, nutzt man die sogenannte **Eigenwertgleichung** bzw. **charakteristische Gleichung** von der Matrix  $A$ .

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Es entsteht aufgrund der Gleichung ein Polynom vom Grade  $n$  (=Ordnung der Matrix).

**Eigenwerte** des vorherigen Beispiels:

$$A = \det \left( \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-2-\lambda) \cdot (1-\lambda) \cdot (-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2 \vee \lambda_2 = 1 \vee \lambda_3 = -1$$

Daraus ergeben sich folgende **Eigenvektoren**:

$$\lambda_1 = -2: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 1: \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = -1: \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

# AUFGABEN

- 1) Berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor der gegebenen Matrix A in Abhängigkeit zu dem Eigenwert  $\lambda = 1$  .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- 2) Bestimmen Sie zu der gegebenen Matrix die zugehörigen Eigenwerte und berechnen den jeweiligen Eigenvektor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$