MATHEMATIK

22.05.2017

AUFGABEN

Vereinfachen Sie die gegebenen Matrizenausdrücke soweit als möglich:

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Determinantenwert der gegebenen Matrizen.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 10 & 4 & -6 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ANWENDUNG DETERMINANTE I

<u>Unterdeterminante:</u>
Liegt keine rein quadratische Matrix vor, so kann eine Unterdeterminante gebildet bzw. berechnet werden.

<u>Rang einer Matrix:</u>
Unter dem Rang einer Matrix versteht man das Format der größtmöglichen Determinanten bzw. Unterdeterminanten, die ungleich Null ist.

Beispiel:

$$Rg\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (8+0+1)-(-6+0+8) = 7$$

Es handelt sich bei der Matrix um ein (3,5) – System, das als Rang max. 3 besitzen könnte. Da die grün umrahmte Unterdeterminante ungleich Null ist wird der Rang 3 bestätigt.

ANWENDUNG DETERMINANTE II

Mittels der Determinanten einer Matrix kann u.a. auch die **lineare (Un) Abhängigkeit** untersucht werden, d.h. ist der Determinantenwert ungleich Null sind die darin enthaltenen **Vektoren** linear unabhängig (anderenfalls linear abhängig)

<u>regulär:</u>
Eine Matrix deren Vektoren linear unabhängig sind, ist **regulär** mit Det(A)<>0.

<u>singulär:</u>
Eine Matrix deren Vektoren linear abhängig sind, ist **singulär** mit Det(A)=0.

Beispiel:

Bilden die folgenden 3 Vektoren eine Basis?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (18+12+2) \\ - \\ (-18-6+4) \end{matrix} = 32+20 = 52 \neq 0$$

Da der Determinantenwert ungleich Null ist, handelt es sich um eine reguläre Matrix und das System besteht aus linear unabhängigen Vektoren, die somit eine Basis bilden.

GESETZE

1) Für die Determinante der transponierten Matrix einer Matrix gilt: $\det A = \det A^T$
2) Das Vertauschen von parallelen Zeilen/ Spalten ändert das Vorzeichen.
3) Multiplikation einer Determinanten mit einem Skalar wird durch die Veränderung einer beliebigen Zeile oder Spalte durchgeführt (kürzen).
4) Sind in einer Matrix zwei Zeilen/ zwei Spalten linear abhängig, so ist die Determinante Null.
5) Addition eines Vielfachen der Elemente einer Reihe zu einer parallelen Reihe ändert den Determinantenwert nicht.

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = 2 \cdot \left[(0+9+2)-(-18+0+3)\right] = 2 \cdot (11+15) = 52$$

AUFGABEN

Bestimmen Sie die gefragten Werte der folgenden Matrizen:

a) $$\det\begin{pmatrix} 2i-3 & 3i-5 & 3-i \\ 3i & 4i & -3 \\ i-4 & -1+2i & 2+i \end{pmatrix}$$

b) $$\det\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) $$Rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

LAPLACESCHER ENTWICKLUNGSSATZ I

Für quadratische Matrizen mit einer **Ordnung > 3** wird die Determinanten mittels der sogenannten **Adjunkten** berechnet. Es handelt sich dabei um eine **Unterdeterminante**, die durch **Streichung** der i-ten Zeile und j-ten Spalte gebildet wird und anhand der **Position** mit + oder – **bewertet** wird.

<u>Adjunkte</u>:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}}$$

<u>Methodik Laplace</u>:

1. Mittels elementarer Umformungen möglichst häufig die 0 in Zeile/ Spalte erzeugen.
2. Die Entwicklung der Determinante basiert darauf innerhalb einer Zeile/ Spalte jedes Element daraus mit der zugehörigen Adjunkten zu multipliziere und abschließend diese Produkte zu summieren.

$$\begin{tikzcd}
& \det A^{>3} \arrow[dl, "\textit{i-ten Zeile}"'] \arrow[dr, "\textit{j-ten Spalte}"] & \\
\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}} & & \boxed{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}}
\end{tikzcd}$$

LAPLACESCHER ENTWICKLUNGSSATZ II

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 12 & 8 \\ 2 & 6 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 & 8 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

gemeinsamer Faktor 4

$\left.\begin{array}{l}\text{Zeile 1}\\ \text{Zeile 2}\end{array}\right\} +$

$\left.\begin{array}{l}\text{Spalte 3}\\ \text{Spalte 2}\end{array}\right\} -$

Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det A = 4 \cdot [0 \cdot A_{11} + 8 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 6 \cdot A_{14}] = 4 \cdot [8 \cdot (-1)^{1+2} \cdot D_{12} + 6 \cdot (-1)^{1+4} \cdot D_{14}]$$

$$\det A = -32 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} - 24 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\det A = -32 \cdot [(-9 - 12 + 24) - (18 + 12 + 12)] - 24 \cdot [(-36 + 9 + 4) - (36 + 12 - 3)]$$

$$\det A = -32 \cdot (3 - 42) - 24 \cdot (-23 - 45) = 1248 + 1632 = 2880$$

AUFGABEN

1) Wie muss x gewählt werden, damit folgende Gleichung erfüllt ist?

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2) Bestimmen Sie mittels Laplaceschem Entwicklungssatz den Wert der folgenden Determinanten.

a) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1+i & 0 \\ 1+i & 1 & 0 & 1-i \\ 0 & -1 & 2+i & -2 \\ -1 & -1+i & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

3) Gesucht ist der Parameter a, so dass der Punkt Q in der Ebene liegt.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}; e : \vec{x} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$