MATHEMATIK

18.05.2017

WIEDERHOLUNG

Bei den Ebenen unterscheiden wir die _____________ und die parameterfreie Darstellung. Wenn wir eine Ebenengleichung durch drei Punkte bestimmen wollen, so müssen die zugehörigen Vektoren __________________ sein, da es sonst nur eine Gerade wäre.
Für die Parameterform müssen wir ausgehend von einem der gegebenen Punkte die beiden _____________ berechnen.
Wenn wir die _____________ (parameterfreie Darstellung) erzeugen möchten, müssen wir im ersten Schritt den _________________ durch das äußere Produkt der beiden Richtungsvektoren berechnen. Dieser Stellungsvektor entspricht grafisch gesehen einem _____________ auf der Ebene.
Um den letzten Parameter für die parameterfreie Darstellung berechnen zu können, setzen wir den _____________ der Ebene in die Gleichung ein und berechnen *d*.
Bei der gegenseitigen Lage zweier Ebenen im Euklidischen Vektorraum gibt es drei Möglichkeiten:

- _____________
- _____________
- _____________

Zur Prüfung bilden wir zuerst die beiden _____________ und testen auch hier, ob diese beiden Vektoren linear abhängig sind. Ist dies der Fall, so wählen wir einen _____________ Punkt der ersten Ebene und setzen diesen in die zweite Ebene ein. Stimmt die entstehende Aussage, so sind beide Ebenen _____________, anderenfalls verlaufen Sie parallel.
Sollten die beiden Stellungsvektoren _____________ sein, so muss eine Schnittgerade vorhanden sein. Damit wir die zugehörige Gleichung erstellen können, bilden wir das ________________ der beiden Stellungsvektoren und erhalten dadurch den _____________ der Schnittgeraden.
Da der Startvektor auf beiden Ebenen ____________ liegen muss erhalten wir ein Gleichungssystem, das aus ______Unbekannten und _______Gleichungen besteht. Also dürfen wir eine Variable frei wählen und können anschließend die beiden fehlenden Koordinaten berechnen.
Für die Abstandberechnung gibt es eigentlich nur drei verschiedene Möglichkeiten:

- _____________
- Gerade-Gerade (_____________)
- _____________

Das liegt einfach daran, dass wir bei zwei _____________ Geraden/ Ebenen immer einen Punkt auf der Geraden/ Ebenen bestimmen und dadurch wieder in der Formel Punkt-Gerade/Ebene sind.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wie werden Matrizen definiert (Eigenschaften/Vorteile)?
- ✓ Was versteht man unter dem Format einer Matrix.
- ✓ Wie werden Matrizen addiert?
- ✓ Wie multipliziert man eine Matrix mit einem Skalar?
- ✓ Wie können Matrizen miteinander multipliziert werden?
- ✓ Was bedeutet eine Determinante einer Matrix?
- ✓ Wie kann eine Determinante berechnet werden?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1. Punkt zu Gerade:

   $g : A = (3;-1;4); B = (2;5;-2) \qquad Q = (-2;3;1)$

2. Punkt zu Ebene:

   $e : (2,1,-5)^T ; (-1,3,-4)^T ; (1,-2,1)^T \qquad Q = (2;-1;4)$

3. Gerade zu Gerade :

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Gerade zu Ebene:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e : x - 2y + z = 4$$

AUFGABEN

5. Gegeben sind die beiden Punkte $A=(1;3;-2)^T$ und $B=(3;4;-1)^T$ und die Ebene mit $e: 2x-3y+z=-5$.

   a) Bestimmen Sie die Geradengleichung durch die beiden Punkte A und B und geben Sie die Parameterdarstellung der Ebene an.
   b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

6. Gegeben sind die Punkte $X = (1;1;2)^T$, $Y = (4;2;-1)^T$ und $Z = (0;1;4)^T$ sowie die Ebene mit $e_2: -x + 2y - 2z = 4$.

   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch die Punkte X, Y und Z in der parameterfreien Form und geben Sie die Parameterdarstellung der Ebene e_2 an.
   b) Wie liegen die beiden Ebenen zueinander?
      Bestimmen Sie ggf. den Abstand bzw. die Schnittgerade.

AUFGABEN

7. Gegeben seien die beiden Ebenen $e_1: 4x + y - z = 13$ und $e_2: 2x + 2y + z = 11$.

   a) Im Falle der Parallelität bestimmen Sie den Abstand der Ebenen, ansonsten eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden g.
   b) Liegt der Punkt $Q(1;1;1)$ in der Ebene e_1 und welchen Abstand hat er von der Ebene e_2?

8. Gegeben seien die folgenden vier Vektoren
   $\vec{a} = (1;3;-2;0)^T$, $\vec{b} = (2;-2;0;0)^T$, $\vec{c} = (0;-2;3;1)^T$, $\vec{d} = (-1;9;0;2)^T$

   a) Bilden diese Vektoren eine Basis (Begründung)?
   b) Wie groß ist die maximale Dimension, die durch diese Vektoren aufgespannt werden kann?

MATRIZEN I

Ein Zahlensystem , das aus **m Zeilen-Vektoren** und aus **n Spalten-Vektoren** besteht wird als **Matrix** im Format (m,n) bezeichnet.
Handelt es sich um eine quadratische Matrix (Zeile = Spalte) spricht man von einem **n-dimensionalen Vektorsystem** (Euklidischer Vektorraum = 3x3-Matrix).

Die zugehörige **Position** einer jeden Komponenten wird im **Index** dargestellt (Zeile x Spalte), wobei die Hauptdiagonale stets einen Pasch als Position besitzt.

$$A_{(m,n)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n\text{-Spalten}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} m\text{-Zeilen}$$

Eine Matrix im Format **(m,1)** wird als **Spaltenvektor**, eine Matrix in der Darstellungsform **(1,n)** als **Zeilenvektor** bezeichnet.

MATRIZEN II

<u>Transponierte Darstellung:</u>
Unter einer **transponierten** Darstellung einer Matrix versteht man das **um 90° gedrehte S**ystem, d.h. die Zeilen werden zu den Spalten und umgekehrt.

$$A_{(3,4)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A^T_{(4,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}^T$$

<u>Gleichheit:</u>
Man spricht von zwei **identischen** Matrizen , sofern folgende Bedingungen erfüllt sind:

- ✓ Das Format (Zeilen/Spalten) stimmt überein
- ✓ Jeder Wert (Ausprägung) an jeder Position ist gleich

MATRIZEN III

<u>Addition/ Subtraktion:</u>

Die Addition/ Subtraktion zweier Matrizen wird **analog zu der Berechnung** von Summe/ Differenz von **Vektoren** durchgeführt.

Es ist darauf zu achten, dass das **Format** der beteiligten Matrizen **gleich** ist, d.h. beide Systeme müssen die gleiche Anzahl an Zeilen bzw. Spalten besitzen.

Anschließend erfolgt die **komponentenweise Addition/ Subtraktion** der Werte je Position.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+5 & 3+6 & 4+3 \\ 5-1 & 6+2 & 7+1 & 8-2 \\ 0+2 & 1-2 & 2+3 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 & 7 \\ 4 & 8 & 8 & 6 \\ 2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- ✓ assoziativ: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- ✓ kommutativ: $A + B = B + A$

MATRIZEN IV

Skalare Multiplikation:

Das **Produkt** einer Matrix mit einem **Skalar** wird mittels komponentenweiser Multiplikation jedes einzelnen Wertes gebildet und stellt somit eine **Verlängerung/ Verkürzung** eines Vektorsystems dar.

Ist jede Komponente durch eine bestimmte Zahl teilbar kann mittels Ausklammern eine einfachere Matrix erzeugt werden.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot 4 \\ 3\cdot 5 & 3\cdot 6 & 3\cdot 7 & 3\cdot 8 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 15 & 18 & 21 & 24 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- ✓ assoziativ: $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) = \beta \cdot (\alpha \cdot A)$
- ✓ distributiv: $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

AUFGABEN

1. Berechnen Sie das Ergebnis der folgenden Matrizensysteme.

a) $$2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -9 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} + 1{,}5\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $$2\cdot\left(3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 15 & 3 \\ -12 & 0 & 9 & -6 \\ 9 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}\right)$$

c) $$2i\cdot\begin{pmatrix} 2+i & 2i & 5i-3 \\ 1-2i & 3i-4 & 3 \\ 3i & 2i+1 & 4i-1 \end{pmatrix} - i\cdot\begin{pmatrix} 1+2i & 5i & 2i+3 \\ 2-i & -4 & 1-2i \\ 4i-1 & 2i & 2i+3 \end{pmatrix}$$

1. Wie müssen die Variablen gewählt werden, damit die beiden Matrizen gleich sind?

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 & 2x_1 + x_2 \\ 3x_3 + x_4 & 6x_4 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_4 - 8 & 2x_4 + 4 \\ 3x_1 - 5 & 7x_2 + 5 \end{pmatrix}$$

MATRIZEN V

Matrizen-Multiplikation:

Das **Produkt** von zwei Matrizen wird mittels **innerem Produkt** von jedem **Zeilenvektor** mit jedem **Spaltenvektor** gebildet.
Das jeweilige Ergebnis wird an der zugehörigen Position (Zeile, Spalte) eingetragen.

Das Produkt kann nur dann gebildet werden, wenn die **inneren Formatwerte** übereinstimmen. Diese werden beim Format der **Ergebnismatrix** gestrichen, so dass nur die äußeren Formatwerte übrig bleiben (**Kontrollmöglichkeit**).

$$A_{(m,n)} * B_{(p,q)} = C_{(m,q)} \rightarrow n = p$$

Eigenschaften:

- ✓ assoziativ: $(A * B) * C = A * (B * C)$
- ✓ NICHT kommutativ: $A * B \neq B * A$
- ✓ distributiv:

$$A * (B + C) = A * B + A * C$$
$$(B + C) * A = B * A + C * A$$
$$\alpha \cdot (A * B) = (\alpha \cdot A) * B = A * (\alpha \cdot B)$$

MATRIZEN VI

Beispiel zu Matrizen-Multiplikation:

$$A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Die inneren Formatwerte stimmen überein.
(Zeilenvektor = Spaltenvektor)

$$A_{(2,3)} * B_{(3,2)} = C_{(2,2)}$$

$$A_{(2,3)} * B_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Inneres Produkt: $a_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 11$

$$A_{(2,3)} * B_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot2+2\cdot4 & 1\cdot0+3\cdot3+2\cdot1 \\ 2\cdot1+4\cdot2+1\cdot4 & 2\cdot0+4\cdot3+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ 14 & 13 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1. Berechnen Sie das Ergebnis der folgenden Matrizensysteme.

a) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} * \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -10 & 8 \\ 2 & 6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $$i^3 \cdot \begin{pmatrix} -1-2i & -3i+1 & 3i+2 \\ 3+i & 2i+3 & i+3 \\ i+4 & 2i+5 & 4i-3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2i \\ -3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE I

Eine Determinante ist eine Funktion, die einer **quadratischen** Matrix **eindeutig** einen Wert $D \in R$ bzw. $D \in C$ zuordnet.

Es handelt sich somit um eine Abbildung von **n^2 Elementen** auf eine **konstante Zahl**.

Die Anzahl der Zeilen- bzw. Spaltenvektoren innerhalb der Determinante heißt **n-te Ordnung** .

Ähnlich wie beim Betrag einer komplexen Zahl oder beim inneren Produkt zweier Vektoren stellt die **Determinante** einer Matrix eine **Kennzahl** dar, die weitere **Rückschlüsse** zulässt.

Regel von Sarrus (2. Ordnung):

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Beispiel: $$\det\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 7 \cdot 4 = -16$$

DETERMINANTE II

<u>Regel von Sarrus (3. Ordnung):</u>

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = \begin{array}{c} (a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}) \\ - \\ (a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}) \end{array}$$

Beispiel:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right. = \begin{array}{c} (2\cdot(-2)\cdot 4 + 4\cdot 1\cdot(-3) + (-3)\cdot 1\cdot 1) \\ - \\ (4\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 1 + (-3)\cdot(-2)\cdot(-3)) \end{array}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (-16-12-3)-(16+2-18) = -31-0 = -31$$

AUFGABEN

Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

a) $$\det\begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

c) $$\det\begin{pmatrix} -3-i & 2i-5 & 2-2i \\ 4+2i & 2-3i & 3i-1 \\ 2i+3 & 2i-1 & 2i-4 \end{pmatrix}$$