

MATHEMATIK

20.05.2019

EBENENGLEICHUNG I

Eine Ebene im \mathbb{R}^3 wird ähnlich wie eine Gerade durch **Orts- und Richtungsvektoren** definiert, wobei die **Parameterform** mittels einem Orts- und zwei zugehörigen Richtungsvektoren gebildet werden kann.

Bei der Bildung der Ebenengleichung ist die **lineare Unabhängigkeit** der Vektoren Voraussetzung.

Beispiel: $\vec{a} = (3;2;-1)^T; \vec{b} = (4;-2;2)^T; \vec{c} = (-1;3;-5)^T$

$$e: \vec{x} = \vec{a} + \alpha \cdot \overline{ab} + \beta \cdot \overline{ac}$$

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4-3 \\ -2-2 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1-3 \\ 3-2 \\ -5-(-1) \end{pmatrix}$$

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

EBENENGLEICHUNG II

Die sogenannte parameterfreie Darstellung basiert auf der **Hesse'schen Normalform** und lautet in der allgemeinen Beschreibung $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$.

Voraussetzung zur Bildung ist des **Stellungsvektors**.

Bei dem Stellungsvektor handelt es sich um den Vektor, der **senkrecht** auf der zugehörigen Ebene steht. Er wird mittels **äußerem Produkt** der Stellungsvektoren gebildet.

Beispiel:
$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot (-4) - (-1) \cdot 3 \\ 3 \cdot (-4) - (-4) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (-1) - (-4) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -16 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 19 \\ -16 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$19 \cdot x - 16 \cdot y - 15 \cdot z = d$$

$$19 \cdot 3 - 16 \cdot 2 - 15 \cdot (-1) = 40$$

$$19 \cdot x - 16 \cdot y - 15 \cdot z = 40$$

AUFGABEN

1) Bilden Sie basierend auf die gegebene Punkte alle die parameterfreie und die Parameterdarstellung der Ebene, sofern diese existiert?

a) $\vec{a} = (2;1;3)^T; \vec{b} = (4;-2;1)^T; \vec{c} = (4;-2;2)^T$

b) $\vec{a} = (0;-2;1)^T; \vec{b} = (-3;-2;2)^T; \vec{c} = (9;2;-4)^T$

c) $\vec{a} = (-1;2;-1)^T; \vec{b} = (2;3;4)^T; \vec{c} = (-2;-1;0)^T$

LAGERELATION VON GERADE/ EBENE

Will man die **gegenseitige Lage** von einer Geraden zu einer Ebene näher bestimmen, so werden die beiden Gleichungen in der **Parameterform** gleichgesetzt und mittels **Gaußverfahren** gelöst.

Es entstehen dadurch 3 unterschiedliche **Lösungsklassen**:

- ✓ Keine Lösung: Die Gerade verläuft **parallel** zur Ebene
- ✓ Eine Lösung: Es existiert ein **Schnittpunkt** zwischen Gerade und Ebene
- ✓ Unendliche Lösungen: Die Gerade **liegt in** der Ebene

Beispiel: $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$e = g \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} -\alpha & -4\beta & -2\gamma & = -1 \\ -4\alpha & -\beta & -\gamma & = 0 \\ 3\alpha & -3\beta & +\gamma & = 5 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} | \cdot (-4) \\ | \cdot (3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} -\alpha & -4\beta & -2\gamma & = -1 \\ 0 & 15\beta & 7\gamma & = 4 \\ 0 & -15\beta & -5\gamma & = 2 \end{array} \right| \left. \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} -\alpha & -4\beta & -2\gamma & = -1 \\ 0 & 15\beta & 7\gamma & = 4 \\ 0 & 0 & 2\gamma & = 6 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha = -\frac{7}{15}; \beta = -\frac{17}{15}; \gamma = 3 \end{array} \right\} \text{ **Schnittpunkt** } \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

LAGERRELATION VON EBENE/ EBENE I

Will man die **gegenseitige Lage** von einer Ebene zu einer Ebene näher bestimmen, so werden die beiden Gleichungen ähnlich wie bei Geraden/ Ebenen gleichgesetzt und können u.a. ebenfalls mittels **Gaußverfahren** gelöst.

Da es sich bei dem zugehörigen Vektorraum um das **Euklidische System** handelt, entfällt die Möglichkeit der **windschiefen Lage**.

Dadurch entstehen 3 unterschiedliche **Lösungsklassen**:

✓ Keine Lösung:

Die erste Ebene verläuft **parallel** zur zweiten Ebene
Es entsteht aufgrund des Gleichungssystems ein **Widerspruch**
bzw. sind die beiden Stellungsvektoren **linear abhängig**.

✓ Unendliche Lösungen I:

Die erste Ebene **schneidet** die zweite Ebene (**Schnittgerade**)
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist von **einer** Variablen
abhängig bzw. sind die Stellungsvektoren **linear unabhängig**.

✓ Unendliche Lösungen II:

Die erste Ebene liegt in der zweiten Ebene (**Identität**).
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist von **zwei** Variablen
abhängig bzw. sind die Stellungsvektoren **linear abhängig** und der
zugehörige **Abstand ist Null**.

LAGERELATION VON EBENE/ EBENE II

Da es relativ kompliziert ist drei Gleichungen mit 4 Unbekannten mittels Gaußverfahren nach den **richtigen Variablen** freizustellen, empfiehlt es sich mittels der **Stellungsvektoren** der Ebenen die Lage der Ebenen zu klassifizieren.

Dadurch ergibt sich die folgende **Lösungsmethodik**:

1. Parameterfreien Form

Es wird im ersten Schritt mittels Stellungsvektoren die **parameterfreie Form** gebildet.

2. Abhängigkeit der Richtungsvektoren:

Sind die beiden **Stellungsvektoren linear abhängig** muss mittels Abstand Parallelität oder Identität geprüft werden. Sonst liegt eine Schnittgerade vor.

3. Äußeres Produkt:

Durch Bildung des äußeren Produkts (**Vektorprodukt**) der Stellungsvektoren der beiden Ebenen erhält man den **Richtungsvektor der Schnittgeraden**.

4. Gemeinsamer Punkt:

Mittels **Vorbelegung** einer beliebigen Variablen und anschließender Lösung des entstehenden Gleichungssystems kann ein gemeinsamer Punkt (**Startvektor**) berechnet werden.

LAGERRELATION VON EBENE/ EBENE III

Beispiel: $e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge e_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$e_1 : \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}; e_2 : \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parameterfreie Darstellung:

$$e_1 : 9x - 6y - z = d \Leftrightarrow 27 - 12 + 4 = 19$$

$$\Rightarrow e_1 : 9x - 6y - z = 19$$

$$e_2 : 0x + 1y + 1z = d \Leftrightarrow 0 + 2 + 2 = 4$$

$$\Rightarrow e_2 : y + z = 4$$

Richtungsvektor der Schnittgeraden:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Startvektorder Schnittgeraden:

$$y = -1 \Rightarrow e_1 : 9x + 6 - z = 19 \wedge e_2 : -1 + z = 4$$

$$\Leftrightarrow z = 5 \wedge x = 2$$

Schnittgeraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1) Bilden Sie die parameterfreie Darstellung und die Parameterform der folgenden ?

$$\vec{a} = (2;1;3)^T; \vec{b} = (4;-2;1)^T; \vec{c} = (1;2;-2)^T$$

2) Bestimmen Sie die jeweils andere Darstellungsform der Ebenen.

$$\text{a) } e: 2x - 3y + 4z = 5 \quad \text{b) } e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Wie liegen die folgenden Ebenen zueinander?

$$e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad e_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU EBENE

Zur Berechnung von einem Abstand definieren wir den **Punkt** Q sowie die Gerade in der Form

$g_n : \vec{x}_n = P_n + \alpha \cdot \vec{b}_n$ mit P_n als **Startpunkt** und \vec{b}_n als **Richtungsvektor** der Geraden n und die zugehörige Ebene in der parameterfreien Darstellung $e : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$.

Aufgrund der parameterfreien Form der Ebene ergibt sich direkt der Stellungsvektor $\vec{n} = (a; b; c)^T$

Die Abstände werden wie folgt definiert:

✓ Punkt zu Ebene:
$$d = \frac{|\vec{n} * (Q - P_0)|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{Hessesche Normalform}$$

✓ Gerade/Ebene zu Ebene:
$$d = \frac{|(P_2 - P_1) * \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

BEISPIELE ABSTAND

Ebene zu Ebene :
(parallel)

$$d = \frac{|(P_2 - P_1) * \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$e_1 : 2x - 5y + 3z = 3 \quad e_2 : -4x + 10y - 6z = 8$$

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-8 + 10 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{38}} \approx 1,14$$

Punkt zu Ebene :

$$d = \frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$e_1 : -x + 3y - 2z = 5 \quad Q = (2;4;1)$$

$$d = \frac{(-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 - 5}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \approx 0,8$$

AUFGABEN I

1. Punkt zu Ebene (parallel):

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Q = (4;1;15)$$

2. Gerade zu Ebene:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e: 2x + y + 3z = 13$$

AUFGABEN II

1. Gegeben sind die Punkte $A=(1,2,0)$, $B=(3,0,4)$ und $C=(3,2,8)$.
 - a) Bestimmen Sie die Geradengleichung durch die Punkte A und B.
 - b) Berechnen Sie – sofern möglich – den Abstand von C zu

2. Gegeben sind die zwei Punkte $A = (5,0,-3)^T$ und $B = (4,2,2)^T$ und die Ebene $e_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; r, s \in R$
 - a) Berechnen Sie die Geradengleichung durch A und B.
 - b) Bestimmen Sie die Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene e_1 .
 - c) Geben Sie den Schnittwinkel des Stellungsvektors der Ebene und der Geraden an.

AUFGABEN III

3. Gegeben sind die drei Punkte $A = (-3, -2, 1)^T$, $B = (1, -1, 2)^T$ und $C = (-2, -1, 3)^T$ und die Ebene $e_1 : 2x - 3y + z = -2$.
- Berechnen Sie die parameterfreie Ebenengleichung e_2 durch A, B, C .
 - Bestimmen Sie die Parameterform der Schnittgeraden von e_1 und e_2 .
4. Gegeben sind die Punkte $X = (1; 1; 2)^T$, $Y = (4; 2; -1)^T$ und $Z = (0; 1; 4)^T$ sowie die Ebene mit $e_2: -x + 2y - 2z = 4$.
- Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene durch die Punkte X, Y und Z in der parameterfreien Form und geben Sie die Parameterdarstellung der Ebene e_2 an.
 - Wie liegen die beiden Ebenen zueinander?
Bestimmen Sie ggf. den Abstand bzw. die Schnittgerade.

AUFGABEN IV

5. Gegeben seien die beiden Ebenen $e_1 : 4x + y - z = 13$ und $e_2 : 2x + 2y + z = 11$.
- Im Falle der Parallelität bestimmen Sie den Abstand der Ebenen, ansonsten eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden g .
 - Liegt der Punkt $Q(1; 1; 1)$ in der Ebene e_1 und welchen Abstand hat er von der Ebene e_2 ?
6. Gegeben seien die folgenden vier Vektoren
 $\vec{a} = (1; 3; -2; 0)^T$, $\vec{b} = (2; -2; 0; 0)^T$, $\vec{c} = (0; -2; 3; 1)^T$, $\vec{d} = (-1; 9; 0; 2)^T$
- Bilden diese Vektoren eine Basis (Begründung)?
 - Wie groß ist die maximale Dimension, die durch diese Vektoren aufgespannt werden kann?