MATHEMATIK

15.05.2017

WIEDERHOLUNG

Der Euklidische Vektorraum wird durch die drei ________________gebildet.
Diese stehen für die drei Achsen des Raums und bilden ein ________________, da sie zum Einen _____________aufeinander stehen und zum Anderen die Länge _________ist.
Wenn eine Gerade durch zwei Punkte definiert wird so erhält man im Bereich der Vektoren die sogenannte ________________.
Diese bildet man, in dem man einen Startvektor wählt und dann den _____________mittel der Differenz aus Endpunkt und ________________bestimmt.
Um die Lage zweier Geraden untersuchen zu können, werden im ersten Schritt die Richtungsvektoren auf _____________ __________untersucht.
Trifft dies zu, so können die Geraden entweder ________________oder identisch zueinander liegen.
Bei Unabhängigkeit werden die Geraden ________________und das entstehende Gleichungssystem gelöst. Bekommt man eine eindeutige Lösung heraus, so existiert ein ________________.
Wenn ein Widerspruch als Lösung herauskommt, so verlaufen die beiden geraden _______.
Damit der Abstand zwischen zwei Geraden berechnet werden kann, müssen diese entweder windschief oder _____________zueinander verlaufen.
Der Abstand eines _____________ zu einer Geraden ist mit dem zweier parallel verlaufender Geraden identisch.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wie bildet man eine Ebene durch 3 Punkte?
- ✓ Welche Darstellungsformen der Ebene im $\mathbb{R}^3$ gibt es?
- ✓ Was ist die Hesse‘sche Normalform?
- ✓ Worin liegen die Vorteile der parameterfreien Form?
- ✓ Berechnungsmethodik zur Ebenenbestimmung.
- ✓ Lagerelation von Gerade/ Ebene zu einer Ebene.
- ✓ Abstandberechnung für Geraden und Ebenen.
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

,
,

AUFGABEN

1) Sind die folgenden 3 Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear unabhängig?

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix};\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}$$

2) Gegeben seien die folgenden vier Vektoren
$\vec{a}=(1;3;-2;0)^T,\ \vec{b}=(2;-2;0;0)^T, \vec{c}=(0;-2;3;1)^T, \vec{d}=(-1;9;0;2)^T$

Bilden diese Vektoren eine Basis (Begründung)?
Wie groß ist die maximale Dimension, die durch diese Vektoren aufgespannt werden kann?

AUFGABEN

1) Liegen die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden?

$$\vec{a} = (2;1;3)^T; \vec{b} = (4;-2;1)^T; \vec{c} = (6;-5;-1)^T$$

2) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden und geben deren Lage zueinander an.

$$g_1 : \vec{a} = (3;2;-1)^T; \vec{b} = (4;-2;2)^T \qquad g_2 : \vec{c} = (-3;4;2)^T; \vec{d} = (-1;-4;8)^T$$

3) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

$$g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

EBENENGLEICHUNG I

Eine Ebene im $\Re^3$ wird ähnlich wie eine Gerade durch **Orts- und Richtungsvektoren** definiert, wobei die **Parameterform** mittels einem Orts- und zwei zugehörigen Richtungsvektoren gebildet werden kann.
Bei der Bildung der Ebenengleichung ist die **lineare Unabhängigkeit** der Vektoren Voraussetzung.

<u>Beispiel:</u> $\vec{a} = (3;2;-1)^T ; \vec{b} = (4;-2;2)^T ; \vec{c} = (-1;3;-5)^T$

$$e : \vec{x} = \vec{a} + \alpha \cdot \overline{ab} + \beta \cdot \overline{ac}$$

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4-3 \\ -2-2 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1-3 \\ 3-2 \\ -5-(-1) \end{pmatrix}$$

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \Re$$

EBENENGLEICHUNG II

Die sogenannte parameterfreie Darstellung basiert auf der **Hesse'schen Normalform** und lautet in der allgemeinen Beschreibung $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$.

Voraussetzung zur Bildung ist des **Stellungsvektors**.
Bei dem Stellungsvektor handelt es sich um den Vektor, der **senkrecht** auf der zugehörigen Ebene steht. Er wird mittels **äußerem Produkt** der Stellungsvektoren gebildet.

<u>Beispiel:</u>

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in \Re$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4)\cdot(-4)-(-1)\cdot 3 \\ 3\cdot(-4)-(-4)\cdot(-1) \\ (-1)\cdot(-1)-(-4)\cdot(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -16 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 19 \\ -16 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

$$19 \cdot x - 16 \cdot y - 15 \cdot z = d$$

$$19 \cdot 3 - 16 \cdot 2 - 15 \cdot (-1) = 40$$

$$\boxed{19 \cdot x - 16 \cdot y - 15 \cdot z = 40}$$

AUFGABEN

1) Bilden Sie basierend auf die gegebene Punkte alle die parameterfreie und die Parameterdarstellung der Ebene, sofern diese existiert?

a) $\vec{a} = (2;1;3)^T ; \vec{b} = (4;-2;1)^T ; \vec{c} = (4;-2;2)^T$

b) $\vec{a} = (0;-2;1)^T ; \vec{b} = (-3;-2;2)^T ; \vec{c} = (9;2;-4)^T$

c) $\vec{a} = (-1;2;-1)^T ; \vec{b} = (2;3;4)^T ; \vec{c} = (-2;-1;0)^T$

LAGERELATION VON GERADE/ EBENE

Will man die **gegenseitige Lage** von einer Geraden zu einer Ebene näher bestimmen, so werden die beiden Gleichungen in der **Parameterform** gleichgesetzt und mittels **Gaußverfahren** gelöst.

Es entstehen dadurch 3 unterschiedliche **Lösungsklassen**:

✓Keine Lösung:	Die Gerade verläuft **parallel** zur Ebene
✓Eine Lösung:	Es existiert ein **Schnittpunkt** zwischen Gerade und Ebene
✓Unendliche Lösungen:	Die Gerade **liegt in** der Ebene

<u>Beispiel:</u> $$e:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\-3\end{pmatrix}\wedge g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix};\alpha,\beta,\gamma\in\Re$$

$$e=g\Rightarrow\left|\begin{matrix}-\alpha & -4\beta & -2\gamma & = & -1\\ -4\alpha & -\beta & -\gamma & = & 0\\ 3\alpha & -3\beta & +\gamma & = & 5\end{matrix}\right| \begin{matrix}\mid\cdot(-4)\\ \\ \\ \end{matrix}\ \begin{matrix}\mid\cdot(3)\\ \\ \\ \end{matrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}-\alpha & -4\beta & -2\gamma & = & -1\\ 0 & 15\beta & 7\gamma & = & 4\\ 0 & -15\beta & -5\gamma & = & 2\end{matrix}\right|$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}-\alpha & -4\beta & -2\gamma & = & -1\\ 0 & 15\beta & 7\gamma & = & 4\\ 0 & 0 & 2\gamma & = & 6\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\alpha=-\frac{7}{15};\beta=-\frac{17}{15};\gamma=3$$

Schnittpunkt $\begin{pmatrix}8\\5\\-2\end{pmatrix}$

LAGERELATION VON EBENE/ EBENE I

Will man die **gegenseitige Lage** von einer Ebene zu einer Ebene näher bestimmen, so werden die beiden Gleichungen ähnlich wie bei Geraden/ Ebenen gleichgesetzt und können u.a. ebenfalls mittels **Gaußverfahren** gelöst.

Da es sich bei dem zugehörigen Vektorraum um das **Euklidische System** handelt, entfällt die Möglichkeit der **windschiefen Lage**.

Dadurch entstehen 3 unterschiedliche **Lösungsklassen**:

✓<u>Keine Lösung</u>:	Die erste Ebene verläuft **parallel** zur zweiten Ebene Es entsteht aufgrund des Gleichungssystems ein **Widerspruch** bzw. sind die beiden Stellungsvektoren **linear abhängig**.
✓<u>Unendliche Lösungen I</u>:	Die erste Ebene **schneidet** die zweite Ebene (**Schnittgerade**) Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist von **einer** Variablen abhängig bzw. sind die Stellungsvektoren **linear unabhängig**.
✓<u>Unendliche Lösungen II</u>:	Die erste Ebene liegt in der zweiten Ebene (**Identität**). Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist von **zwei** Variablen abhängig bzw. sind die Stellungsvektoren **linear abhängig** und der zugehörige **Abstand ist Null**.

LAGERELATION VON EBENE/ EBENE II

Da es relativ kompliziert ist drei Gleichungen mit 4 Unbekannten mittels Gaußverfahren nach den **richtigen Variablen** freizustellen, empfiehlt es sich mittels der **Stellungsvektoren** der Ebenen die Lage der Ebenen zu klassifizieren.
Dadurch ergibt sich die folgende **Lösungsmethodik**:

1. Parameterfreien Form
   Es wird im ersten Schritt mittels Stellungsvektoren die **parameterfreie Form** gebildet.

2. Abhängigkeit der Richtungsvektoren:
   Sind die beiden **Stellungsvektoren linear abhängig** muss mittels Abstand Parallelität oder Identität geprüft werden. Sonst liegt eine Schnittgerade vor.

3. Äußeres Produkt:
   Durch Bildung des äußeren Produkts (**Vektorprodukt**) der Stellungsvektoren der beiden Ebenen erhält man den **Richtungsvektor der Schnittgeraden**.

4. Gemeinsamer Punkt:
   Mittels **Vorbelegung** einer beliebigen Variablen und anschließender Lösung des entstehenden Gleichungssystems kann ein gemeinsamer Punkt (**Startvektor**) berechnet werden.

LAGERELATION VON EBENE/ EBENE III

<u>Beispiel:</u> $e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge e_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Re$

$$e_1: \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}; e_2: \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parameterfreie Darstellung:

$e_1: 9x - 6y - z = d \Leftrightarrow 27 - 12 + 4 = 19 \qquad \Rightarrow e_1: 9x - 6y - z = 19$

$e_2: 0x + 1y + 1z = d \Leftrightarrow 0 + 2 + 2 = 4 \qquad \Rightarrow e_2: y + z = 4$

Richtungsvektor der Schnittgeraden:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Startvektorder Schnittgeraden:

$$y = -1 \Rightarrow e_1: 9x + 6 - z = 19 \wedge e_2: -1 + z = 4$$

$$\Leftrightarrow z = 5 \wedge x = 2$$

Schnittgeraden

$$\boxed{g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}}$$

AUFGABEN

1) Bilden Sie die parameterfreie Darstellung und die Parameterform der folgenden ?

$\vec{a} = (2;1;3)^T; \vec{b} = (4;-2;1)^T; \vec{c} = (1;2;-2)^T$

2) Bestimmen Sie die jeweils andere Darstellungsform der Ebenen.

a) $e: 2x - 3y + 4z = 5$ b) $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Wie liegen die folgenden Ebenen zueinander?

$e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $e_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU EBENE

Zur Berechnung von einem Abstand definieren wie den **Punkt** *Q* sowie die Gerade in der Form $g_n : \vec{x}_n = P_n + \alpha \cdot \vec{b}_n$ mit P_n als **Startpunkt** und $\vec{b}_n$ als **Richtungsvektor** der Geraden *n* und die zugehörige Ebene in der parameterfreien Darstellung $e : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$.

Aufgrund der parameterfreien Form der Ebene ergibt sich direkt der Stellungsvektor $\vec{n} = (a;b;c)^T$

Die Abstände werden wie folgt definiert:

- ✓ Punkt zu Ebene:

$$d = \frac{\left|\vec{n} * (Q - P_0)\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

$$d = \frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Hessesche Normalform

- ✓ Gerade/Ebene zu Ebene:

$$d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * \vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

BEISPIELE ABSTAND

Ebene zu Ebene :
(parallel)

$e_1: 2x - 5y + 3z = 3 \qquad e_2: -4x + 10y - 6z = 8$

$$\boxed{d = \frac{|(P_2 - P_1) * \vec{n}|}{|\vec{n}|}}$$

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-8 + 10 - 9|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{38}} \approx 1{,}14$$

Punkt zu Ebene :

$e_1: -x + 3y - 2z = 5 \qquad Q = (2;4;1)$

$$\boxed{d = \frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

$$d = \frac{(-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 - 5}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \approx 0{,}8$$

AUFGABEN

1. Punkt zu Ebene (parallel):

$$e:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}\qquad Q=(4;1;15)$$

2. Gerade zu Ebene:

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix}\qquad e:2x+y+3z=13$$

AUFGABEN

1. Gegeben sind die Punkte A=(1,2,0), B=(3,0,4) und C=(3,2,8).

   a) Bestimmen Sie die Geradengleichung durch die Punkte A und B.

   b) Berechnen Sie – sofern möglich – den Abstand von C zu

2. Gegeben sind die zwei Punkte $A=(5,0,-3)^T$ und $B=(4,2,2)^T$ und die Ebene

   $$e_1: \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}; r, s \in R$$

   a) Berechnen Sie die Geradengleichung durch A und B.

   b) Bestimmen Sie die Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene e_1.

   c) Geben Sie den Schnittwinkel des Stellungsvektors der Ebene und der Geraden an.