

MATHEMATIK

13.05.2019

AUFGABEN I

1) Sind die folgenden 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig?

Stellen Sie den Vektor \vec{d} als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2) Prüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren eine Basis bilden und geben die maximal mögliche Dimension mit dem zugehörigen Raum an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN II

3) Berechnen Sie das äußere Produkt der folgenden Vektoren.

a) $\vec{a} = (1; 2; -2)^T; \vec{b} = (-2; 3; 5)^T$ b) $\vec{a} = (-4; 2; -1)^T; \vec{b} = (2; -3; 2)^T$

4) Geben Sie die Parameterform der Geraden durch folgende Punkte an.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

5) Prüfen Sie, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen (2 Varianten).

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

LAGERELATION VON GERADEN I

Im Euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 handelt es sich um einen **3-dimensionalen Raum**, der durch die 3 Koordinateneinheitsvektoren als **Basis** definiert ist.

Da eine Gerade nur ein 2-dimensionales Objekt ist, existieren insgesamt vier mögliche Lagerrelationen:

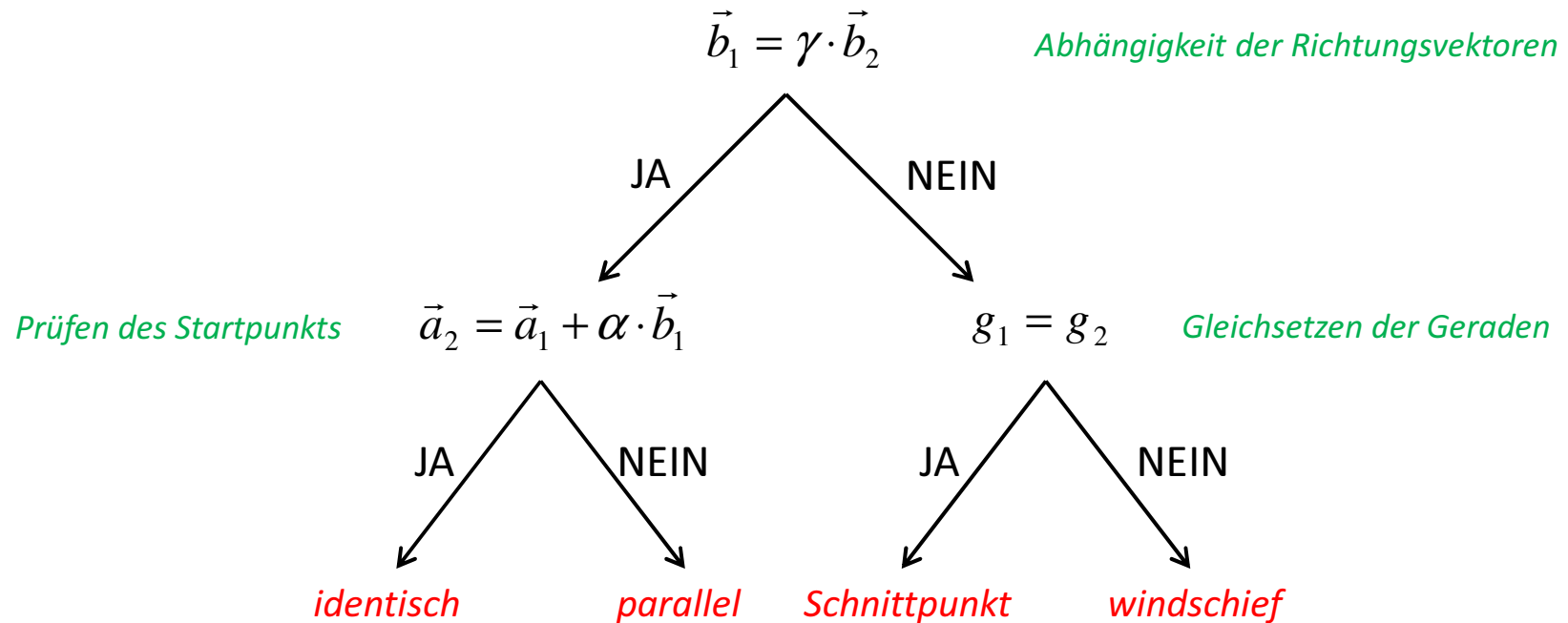
$$\text{Gerade} = \text{Startpunkt} + \text{Parameter} * \text{Richtungsvektor}$$

- ✓ parallel: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **nicht auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ identisch: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ schneiden sich: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich eine **eindeutige Lösung** für die Parameter.
- ✓ windschief: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich ein **Widerspruch** für die Parameter.

LAGERELATION VON GERADEN II

Aufgrund der definierten Lagerelationen ergibt sich der folgende Entscheidungsbaum:

$$g_1 : \vec{x}_1 = \vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{b}_1 \quad g_2 : \vec{x}_2 = \vec{a}_2 + \beta \cdot \vec{b}_2$$



LAGERELATION VON GERADEN III

Beispiel: $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. *Abhängigkeit der Richtungsvektoren:* $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma = 3 \\ \gamma = 1 \\ \gamma = -4 \end{matrix}$

2. *Gleichsetzen der Geraden:* $g_1 = g_2 \Leftrightarrow \begin{matrix} 3\alpha - 1\beta = -3 \\ -2\alpha + 2\beta = -2 \\ -4\alpha - 1\beta = 6 \end{matrix} \begin{matrix} | \cdot 2 \\ | \cdot (-1) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} 3\alpha - 1\beta = -3 \\ -2\alpha + 2\beta = -2 \\ -4\alpha - 1\beta = 6 \end{matrix}} \right\}$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} 3\alpha - 1\beta = -3 \\ 4\alpha \quad 0 = -8 \\ -7\alpha \quad 0 = 9 \end{matrix} \Leftrightarrow \alpha = -2 \wedge \alpha = -\frac{9}{7}$$

Aufgrund des Widerspruchs müssen die beiden Geraden windschief zueinander liegen.

AUFGABEN ZUR LAGERRELATION

1) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

$$\text{a) } g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden und geben deren Lage zueinander an.

$$\text{a) } g_1 : \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g_1 : \vec{a} = (2; -2; 5)^T; \vec{b} = (-1; 1; 3)^T \qquad g_2 : \vec{c} = (-1; 3; 2)^T; \vec{d} = (3; -2; 5)^T$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE I

Zur Berechnung von einem Abstand definieren wir den **Punkt** Q und die Gerade in der Form $g_n : \vec{x}_n = P_n + \alpha \cdot \vec{b}_n$ mit P_n als **Startpunkt** und \vec{b}_n als **Richtungsvektor** der Geraden n .

✓ Punkt zu Gerade:
$$d = \frac{|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)|}{|\vec{b}_1|}$$

✓ Gerade zu Gerade (parallel):
$$d = \frac{|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)|}{|\vec{b}_1|}$$

✓ Gerade zu Gerade (windschief):
$$d = \frac{|(P_2 - P_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)|}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE II

Beispiel Punkt zu Gerade:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)|}{|\vec{b}_1|}$$

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 10 - 20 \\ -4 - (-15) \\ -15 - (-2) \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-10)^2 + 11^2 + (-13)^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2}} = \sqrt{\frac{390}{29}} \approx 3,67$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE III

Beispiel Gerade zu Gerade:
(parallel)

$$g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)|}{|\vec{b}_1|}$$

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 7-12 \\ -3-14 \\ 8-(-1) \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (17)^2 + 9^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{395}{14}} \approx 5,31$$

BEISPIELE ABSTAND

Gerade zu Gerade:
(windschief)

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{|(P_2 - P_1) * (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)|}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}$$

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) * \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{|-15 + 6 - 15|}{\sqrt{38}} = \frac{24}{\sqrt{38}} \approx 3,89$$

AUFGABEN

1. Punkt zu Gerade:

$$g : A = (2;1;3); B = (-1;2;1)$$

$$Q = (2;5;-2)$$

2. Gerade zu Gerade (windschief):

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$