MATHEMATIK

27.04.2018

LAGERELATION VON GERADEN I

Im Euklidischen Vektorraum $\Re^3$ handelt es sich um einen **3-dimensionalen Raum**, der durch die 3 Koordinanteneinheitsvektoren als **Basis** definiert ist.
Da eine Gerade nur ein 2-dimensionales Objekt ist, existieren insgesamt vier mögliche Lagerelationen:

*Gerade = Startpunkt + Parameter * Richtungsvektor*

✓<u>parallel</u>: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **nicht auf** der zweiten Geraden liegt.

✓<u>identisch</u>: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **auf** der zweiten Geraden liegt.

✓<u>schneiden sich</u>: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich eine **eindeutige Lösung** für die Parameter.

✓<u>windschief</u>: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich ein **Widerspruch** für die Parameter.

LAGERELATION VON GERADEN II

Aufgrund der definierten Lagerelationen ergibt sich der folgende Entscheidungsbaum:

$$g_1 : \vec{x}_1 = \vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{b}_1 \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \vec{a}_2 + \beta \cdot \vec{b}_2$$

$$\vec{b}_1 = \gamma \cdot \vec{b}_2$$

Abhängigkeit der Richtungsvektoren

JA

NEIN

Prüfen des Startpunkts $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{b}_1$

$g_1 = g_2$ *Gleichsetzen der Geraden*

JA

NEIN

JA

NEIN

identisch *parallel* *Schnittpunkt* *windschief*

LAGERELATION VON GERADEN III

Beispiel: $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.Abhängigkeit der Richtungsvektoren: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \gamma = 3 \\ \gamma = 1 \\ \gamma = -4 \end{array}$

2.Gleichsetzen der Geraden: $g_1 = g_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccc} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ -2\alpha & 2\beta & = & -2 \\ -4\alpha & -1\beta & = & 6 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \mid \cdot 2 \quad \mid \cdot (-1) \\ \\ \\ \end{array}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccc} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ 4\alpha & 0 & = & -8 \\ -7\alpha & 0 & = & 9 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \alpha = -2 \wedge \alpha = -\frac{9}{7}$$

Aufgrund des Widerspruchs müssen die beiden Geraden windschief zueinander liegen.

,
,

AUFGABEN ZUR LAGERELATION

1) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

a) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$

2) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden und geben deren Lage zueinander an.

a) $g_1 : \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad g_2 : \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{a} = (2;-2;5)^T ; \vec{b} = (-1;1;3)^T$ $\quad g_2 : \vec{c} = (-1;3;2)^T ; \vec{d} = (3;-2;5)^T$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE I

Zur Berechnung von einem Abstand definieren wie den **Punkt** *Q* und die Gerade in der Form $g_n : \vec{x}_n = P_n + \alpha \cdot \vec{b}_n$ mit P_n als **Startpunkt** und $\vec{b}_n$ als **Richtungsvektor** der Geraden *n*.

- ✓ Punkt zu Gerade: $$d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}$$

- ✓ Gerade zu Gerade (**parallel**): $$d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}$$

- ✓ Gerade zu Gerade (**windschief**): $$d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\right|}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE II

Beispiel Punkt zu Gerade: $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}}$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 10-20 \\ -4-(-15) \\ -15-(-2) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-10)^2 + 11^2 + (-13)^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2}} = \sqrt{\frac{390}{29}} \approx 3{,}67$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE III

Beispiel Gerade zu Gerade:
(parallel)

$$g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}}$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 7-12 \\ -3-14 \\ 8-(-1) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (17)^2 + 9^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{395}{14}} \approx 5{,}31$$

BEISPIELE ABSTAND

<u>Gerade zu Gerade:</u>
(windschief)

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\right|}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}}$$

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) * \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{\left|-15 + 6 - 15\right|}{\sqrt{38}} = \frac{24}{\sqrt{38}} \approx 3{,}89$$

AUFGABEN

1. Punkt zu Gerade:
   $g: A = (2;1;3); B = (-1;2;1)$ $\quad$ $Q = (2;5;-2)$

2. Gerade zu Gerade (windschief):

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$