MATHEMATIK

11.05.2017

WIEDERHOLUNG

Beim inneren Produkt (_______) wird komponentenweise multipliziert und die entstehenden Produkte anschließend _______.
Somit handelt es sich um keine ______ ________, da nur eine Zahl (Skalar) als Lösung herauskommt.
Das Skalarprodukt wird u.a. dazu genutzt um die ____________eines Vektors zu berechnen, in dem man die Wurzel daraus zieht bzw. um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen.
Das äußere Produkt (_________________) zweier Vektoren bildet eine _________________Operation, d.h. als Lösung muss immer ein Vektor herauskommen.
Das Vektorprodukt als auch die Differenz von Vektoren sind __________________, d.h. das Ergebnis der Rechnung wird mit minus Eins multipliziert.

Zwei Vektoren sind quasi gleich, wenn diese auseinander erzeugbar sind, d.h. der eine Vektor ein ___________ des anderen Vektor ist.
Wenn man ein Vektorensystem auf lineare (___)Abhängigkeit prüfen möchte, dann bildet man im ersten Schritt die _________________ der zugehörigen Vektoren, in dem man vor jeden Vektor einen Parameter setzt.
Diese Kombination muss den _________________ergeben.
Kommt als Ergebnis nur die _________________heraus, so sind die Vektoren linear unabhängig und bilden dadurch eine sogenannte ______________.
Kommt zusätzlich zu der Triviallösung _______eine weitere Lösung heraus, so sind die Vektoren linear _________________.
Ist eine Basis vorhanden so gibt die Anzahl der Vektoren die _________________des Systems an und der Span der Vektoren bildet somit den _________________der Dimension.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was sind die Koordinateneinheitsvektoren?
- ✓ Was bedeutet der Euklidische Vektorraum?
- ✓ Welche Klassen von Vektoren existieren?
- ✓ Wie definieren wir eine Gerade?
- ✓ Wie können Geraden zueinander verlaufen?
- ✓ Wie funktioniert der Entscheidungsbaum der Lagerelation?
- ✓ Wie berechnet man den Abstand von Gerade (Punkt) zu Gerade?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Berechnen Sie – sofern möglich – den Winkel bzw. den Abstand der Vektoren und geben die Länge der Vektoren an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

a)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3X \\ -2 \\ X-1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \\ -2X \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ -a \\ 7a \\ -2a \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1) Stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ dar.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

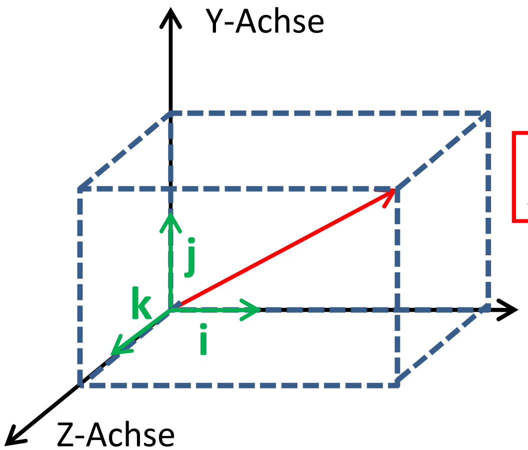
2) Bilden die gegebenen Vektoren eine Basis? Geben Sie die max. mögliche Dimension an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

EUKLIDISCHER VEKTORRAUM

Als Grundlage für Geraden- und Ebenenberechnung im 3-dimensionalen Raum dient der Euklidische Vektorraum $\Re x \Re x \Re = \Re^3$.

Die Vektoren können nicht nur senkrecht, sondern auch in der waagerechten der sogenannten **transponierten** Form $(x; y; z)^T$ dargestellt werden.



$$\vec{p} = (x; y; z)^T$$

$$\left.\begin{array}{l} i = (1;0;0)^T \\ j = (0;1;0)^T \\ k = (0;0;1)^T \end{array}\right\} \text{Koordinaten-einheitsvektoren}$$

Betrag: $\left|\vec{p}\right| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Winkel: $\cos(i, \vec{p}) = \dfrac{x}{r}; \cos(j, \vec{p}) = \dfrac{y}{r}; \cos(k, \vec{p}) = \dfrac{z}{r}$

VEKTORENKLASSEN

Für die Vektorrechnung im Bereich von Geraden, Ebenen und Körper ist es wichtig die beiden möglichen Arten von Vektoren zu unterscheiden.

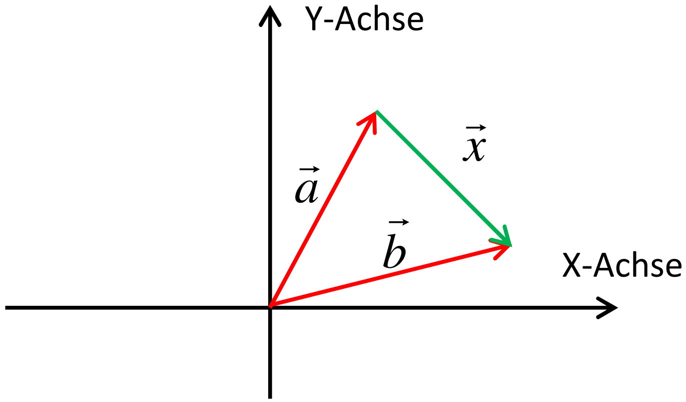
- ✓ <u>Ortsvektor</u>: Stellt die direkte Verbindung vom Ursprung zu einem beliebigen Punkt im Raum dar. $\vec{a} = \overline{0A}$

- ✓ <u>Richtungsvektor</u>: Werden zwei beliebige Punkte im Raum verbunden, so erhält man den Richtungsvektor, der sich stets aus der Differenz zwischen Endpunkt und Anfangspunkt berechnet. $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

<u>Beispiel</u>:

✓Ortsvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

✓Richtungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$



GERADENGLEICHUNG

Eine Gerade ist die graphische Darstellung einer linearen Gleichung bestehend aus **Steigung** und **Startpunkt** bzw. Achsenabschnitt und wird in folgenden zwei Arten dargestellt.

- ✓ Parameterfreie Form: $y = m \cdot x + b$
  b=Achsenabschnitt; m = Steigung

- ✓ Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \alpha \cdot \overline{AB}$
  $\vec{a}$ = Ortsvektor (Startpunkt); $\overline{AB}$= Richtungsvektor

Beispiel:

- ✓ Parameterfreie Form:

$$\left.\begin{array}{l} A = (3;5) \\ B = (2;7) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-5}{2-3} = -2 \\ b = y - m \cdot x = 7 - (-2) \cdot 2 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2 \cdot x + 11$$

- ✓ Parameterform:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} (-1)-2 \\ 2-1 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

,
,

AUFGABEN ZU GERADEN

1) Berechnen Sie das äußere Produkt der folgenden Vektoren.

   a) $\vec{a} = (2;-1;3)^T ; \vec{b} = (-1;2;5)^T$ b) $\vec{c} = (-2;4;1)^T ; \vec{b} = (5;3;1)^T$

2) Berechnen Sie sowohl die parameterfreie als auch die Parameterform der Gerade durch die folgenden Punkte und fertigen Sie eine Skizze an.

   a) $A = (2;5); B = (-2;3)$ b) $A = (-1;3); B = (2;-6)$

3) Geben Sie die Parameterform der Geraden durch folgende Punkte an.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

4) Prüfen Sie, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

LAGERELATION VON GERADEN I

Im Euklidischen Vektorraum $\Re^3$ handelt es sich um einen **3-dimensionalen Raum**, der durch die 3 Koordinanteneinheitsvektoren als **Basis** definiert ist.
Da eine Gerade nur ein 2-dimensionales Objekt ist, existieren insgesamt vier mögliche Lagerelationen:

*Gerade = Startpunkt + Parameter * Richtungsvektor*

- ✓ parallel: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **nicht auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ identisch: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ schneiden sich: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich eine **eindeutige Lösung** für die Parameter.
- ✓ windschief: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich ein **Widerspruch** für die Parameter.

LAGERELATION VON GERADEN II

Aufgrund der definierten Lagerelationen ergibt sich der folgende Entscheidungsbaum:

$$g_1 : \vec{x}_1 = \vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{b}_1 \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \vec{a}_2 + \beta \cdot \vec{b}_2$$

$\vec{b}_1 = \gamma \cdot \vec{b}_2$ *Abhängigkeit der Richtungsvektoren*

- JA: *Prüfen des Startpunkts* $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{b}_1$
  - JA: *identisch*
  - NEIN: *parallel*
- NEIN: $g_1 = g_2$ *Gleichsetzen der Geraden*
  - JA: *Schnittpunkt*
  - NEIN: *windschief*

LAGERELATION VON GERADEN III

Beispiel: $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. *Abhängigkeit der Richtungsvektoren*: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \gamma = 3 \\ \gamma = 1 \\ \gamma = -4 \end{array}$

2. *Gleichsetzen der Geraden*: $g_1 = g_2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rrcr} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ -2\alpha & 2\beta & = & -2 \\ -4\alpha & -1\beta & = & 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} \mid \cdot 2 \quad \mid \cdot (-1) \\ \\ \\ \end{array}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{rrcr} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ 4\alpha & 0 & = & -8 \\ -7\alpha & 0 & = & 9 \end{array} \right| \Leftrightarrow \alpha = -2 \wedge \alpha = -\frac{9}{7}$$

Aufgrund des Widerspruchs müssen die beiden Geraden windschief zueinander liegen.

,
,

AUFGABEN ZUR LAGERELATION

1) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

a) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$

2) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden und geben deren Lage zueinander an.

a) $g_1 : \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{a} = (2;-2;5)^T ; \vec{b} = (-1;1;3)^T$ $\qquad g_2 : \vec{c} = (-1;3;2)^T ; \vec{d} = (3;-2;5)^T$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE I

Zur Berechnung von einem Abstand definieren wie den **Punkt** *Q* und die Gerade in der Form $g_n : \vec{x}_n = P_n + \alpha \cdot \vec{b}_n$ mit P_n als **Startpunkt** und $\vec{b}_n$ als **Richtungsvektor** der Geraden *n*.

- ✓ Punkt zu Gerade: $$d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}$$

- ✓ Gerade zu Gerade (**parallel**): $$d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}$$

- ✓ Gerade zu Gerade (**windschief**): $$d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\right|}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE II

Beispiel Punkt zu Gerade:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}}$$

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 10 - 20 \\ -4 - (-15) \\ -15 - (-2) \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-10)^2 + 11^2 + (-13)^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2}} = \sqrt{\frac{390}{29}} \approx 3{,}67$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE III

<u>Beispiel Gerade zu Gerade:</u>
(parallel)

$$g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}}$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 7-12 \\ -3-14 \\ 8-(-1) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (17)^2 + 9^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{395}{14}} \approx 5{,}31$$

BEISPIELE ABSTAND

Gerade zu Gerade:
(windschief)

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\right|}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}}$$

$$d = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) * \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{\left|-15 + 6 - 15\right|}{\sqrt{38}} = \frac{24}{\sqrt{38}} \approx 3{,}89$$

AUFGABEN

1. Punkt zu Gerade:

   $g : A = (2;1;3); B = (-1;2;1)$ $\quad Q = (2;5;-2)$

2. Gerade zu Gerade (windschief):

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$