MATHEMATIK

26.04.2018

WIEDERHOLUNG

Beim inneren Produkt (_______) wird komponentenweise multipliziert und die entstehenden Produkte anschließend .

Somit handelt es sich um keine _______ _________, da nur eine Zahl (Skalar) als Lösung herauskommt.

Das Skalarprodukt wird u.a. dazu genutzt um die ____________eines Vektors zu berechnen, in dem man die Wurzel daraus zieht bzw. um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen.

Das äußere Produkt (_________________) zweier Vektoren bildet eine _________________Operation, d.h. als Lösung muss immer ein Vektor herauskommen.

Das Vektorprodukt als auch die Differenz von Vektoren sind __________________, d.h. das Ergebnis der Rechnung wird mit minus Eins multipliziert.

Zwei Vektoren sind quasi gleich, wenn diese auseinander erzeugbar sind, d.h. der eine Vektor ein ____________ des anderen Vektor ist.

Wenn man ein Vektorensystem auf lineare (___)Abhängigkeit prüfen möchte, dann bildet man im ersten Schritt die _________________ der zugehörigen Vektoren, in dem man vor jeden Vektor einen Parameter setzt.

Diese Kombination muss den _________________ergeben.

Kommt als Ergebnis nur die _________________heraus, so sind die Vektoren linear unabhängig und bilden dadurch eine sogenannte ______________.

Kommt zusätzlich zu der Triviallösung _______eine weitere Lösung heraus, so sind die Vektoren linear _________________.

Ist eine Basis vorhanden so gibt die Anzahl der Vektoren die _________________des Systems an und der Span der Vektoren bildet somit den _________________der Dimension.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was sind die Koordinateneinheitsvektoren?
- ✓ Was bedeutet der Euklidische Vektorraum?
- ✓ Welche Klassen von Vektoren existieren?
- ✓ Wie definieren wir eine Gerade?
- ✓ Wie können Geraden zueinander verlaufen?
- ✓ Wie funktioniert der Entscheidungsbaum der Lagerelation?
- ✓ Wie berechnet man den Abstand von Gerade (Punkt) zu Gerade?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

AUFGABEN

1) Berechnen Sie – sofern möglich – den Winkel bzw. den Abstand der Vektoren und geben die Länge der Vektoren an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

a) $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3X \\ -2 \\ X-1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \\ -2X \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) $$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ -a \\ 7a \\ -2a \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1) Stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ dar.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -12 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

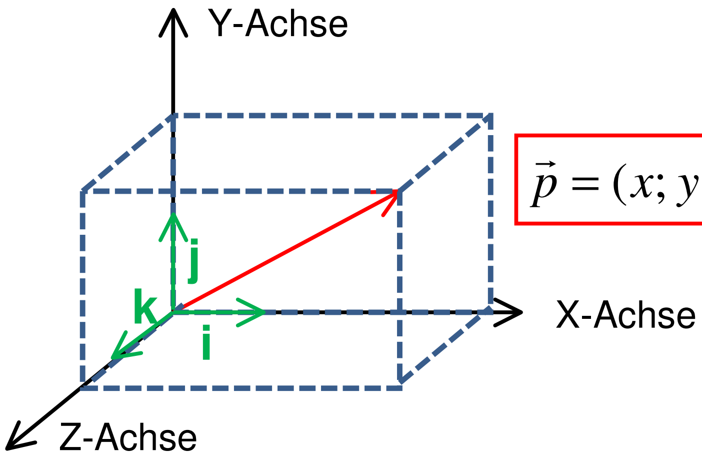
2) Bilden die gegebenen Vektoren eine Basis? Geben Sie die max. mögliche Dimension an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

EUKLIDISCHER VEKTORRAUM

Als Grundlage für Geraden- und Ebenenberechnung im 3-dimensionalen Raum dient der Euklidische Vektorraum $\Re x \Re x \Re = \Re^3$.

Die Vektoren können nicht nur senkrecht, sondern auch in der waagerechten der sogenannten **transponierten** Form $(x; y; z)^T$ dargestellt werden.



$$\boxed{\vec{p} = (x; y; z)^T}$$

$$\left.\boxed{\begin{aligned} i &= (1;0;0)^T \\ j &= (0;1;0)^T \\ k &= (0;0;1)^T \end{aligned}}\right\}$$ Koordinaten-einheitsvektoren

Betrag: $|\vec{p}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Winkel: $\cos(i, \vec{p}) = \frac{x}{r}; \cos(j, \vec{p}) = \frac{y}{r}; \cos(k, \vec{p}) = \frac{z}{r}$

VEKTORENKLASSEN

Für die Vektorrechnung im Bereich von Geraden, Ebenen und Körper ist es wichtig die beiden möglichen Arten von Vektoren zu unterscheiden.

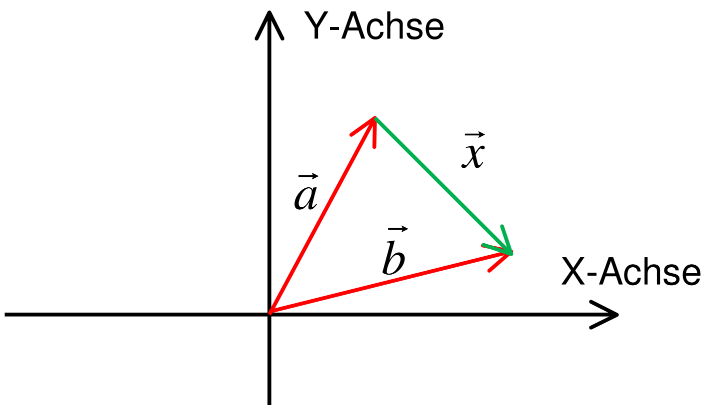
✓Ortsvektor: Stellt die direkte Verbindung vom Ursprung zu einem beliebigen Punkt im Raum dar. $\vec{a} = \overline{0A}$

✓Richtungsvektor: Werden zwei beliebige Punkte im Raum verbunden, so erhält man den Richtungsvektor, der sich stets aus der Differenz zwischen Endpunkt und Anfangspunkt berechnet. $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Beispiel:

✓Ortsvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

✓Richtungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$



GERADENGLEICHUNG

Eine Gerade ist die graphische Darstellung einer linearen Gleichung bestehend aus **Steigung** und **Startpunkt** bzw. Achsenabschnitt und wird in folgenden zwei Arten dargestellt.

✓Parameterfreie Form: $y = m \cdot x + b$

b=Achsenabschnitt; m = Steigung

✓Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \alpha \cdot \overline{AB}$

$\vec{a}$ = Ortsvektor (Startpunkt); $\overline{AB}$ = Richtungsvektor

Beispiel:

✓ Parameterfreie Form:

$$\left.\begin{matrix} A = (3;5) \\ B = (2;7) \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-5}{2-3} = -2 \\ b = y - m \cdot x = 7 - (-2) \cdot 2 = 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = -2 \cdot x + 11$$

✓ Parameterform:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} (-1)-2 \\ 2-1 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

,
,

AUFGABEN ZU GERADEN

1) Berechnen Sie das äußere Produkt der folgenden Vektoren.

a) $\vec{a} = (2;-1;3)^T; \vec{b} = (-1;2;5)^T$ b) $\vec{c} = (-2;4;1)^T; \vec{b} = (5;3;1)^T$

2) Berechnen Sie sowohl die parameterfreie als auch die Parameterform der Gerade durch die folgenden Punkte und fertigen Sie eine Skizze an.

a) $A = (2;5); B = (-2;3)$ b) $A = (-1;3); B = (2;-6)$

3) Geben Sie die Parameterform der Geraden durch folgende Punkte an.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

4) Prüfen Sie, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$