MATHEMATIK

06.05.2019

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Welche Eigenschaften besitzt der Vektorraum?
- ✓ Was sind Skalare?
- ✓ Was hat der Körper mit dem Raum zu tun?
- ✓ Was ist der Produktvektorraum?
- ✓ Wie wird das innere Produkt von Vektoren bestimmt?
- ✓ Wie berechnet man das äußere Produkt (Vektorprodukt)?
- ✓ Wie bestimmt man den Winkel bzw. die Länge von Vektoren?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

RAUM I

Für die Raumbetrachtung ergänzen wir die Struktur des Körpers um eine weitere Menge. Hierbei wird die Menge der Variablen (**Vektoren**) durch die der Parameter (**Skalare**) ergänzt und man prüft hinsichtlich dieser Kombination verschiedene Eigenschaften.

$$(V, \odot_1, \odot_2, K)$$

Die Menge $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots\}$ bezeichnet man als **Skalare**.
Die Menge V= $\{a, b, c, \dots\}$ bezeichnet man als **Vektoren**.

Damit die algebraische Struktur einen Raum bildet müssen auch hier einige bereits bekannte Eigenschaften und einige neue erfüllt sein.

- ✓ $(K, \odot_1, \odot_2)$ ist eine Körper
  - ➢ achten Sie auf den definierten Operator $\odot_1$ (Körperaddition)
  - ➢ achten Sie auf den definierten Operator $\odot_2$ (Körpermultiplikation)
- ✓ $(V, \odot_1)$ ist eine abelsche Gruppe
  - ➢ achten Sie auf den definierten Operator$\odot_1$(Gruppenaddition)

RAUM II

$$(V, \odot_1, \odot_2, K)$$

Nun wurden separat die beiden Mengen der Skalare und Vektoren und die definierten Operatoren betrachtet. Allerdings wurde noch nicht die Kombination aus beiden Mengen $K \times V$ und der zweite Operator der Vektoren $\odot_2$ untersucht.

✓ $K \times V \to V$ Skalarmultiplikation

- Binäre Operation: $K \odot_2 V \to V$
- Assoziativgesetz: $\beta \odot_2 (\gamma \odot_2 a) = (\beta \odot_2 \gamma) \odot_2 a; a \in V;\ \beta, \gamma \in K$
- Neutrales Element: $a \odot_2 ① = a; a \in V; ① \in K$
- Distributivgesetz: $(\beta \odot_1 \gamma) \odot_2 a = \beta \odot_2 a \odot_1 \gamma \odot_2 a; a \in V;\ \beta, \gamma \in K$

  $\beta \odot_2 (a \odot_2 b) = \beta \odot_2 a \odot_2 \beta \odot_2 b; a, b \in V;\ \beta \in K$

Sind alle diese Eigenschaften gleichzeitig erfüllt, dann handelt es sich um einen **Vektorraum**.

- reeller Vektorraum $(\mathbb{R}^n, +, *, \mathbb{R})$: $\mathbb{R}$ - Vektorraum
- Komplexer Vektorraum $(\mathbb{C}^n, +, *, \mathbb{C})$: $\mathbb{C}$- Vektorraum

ZUSAMMENFASSUNG

✓ $(M, \odot_1)$: (abelscher) Halbgruppe, Monoid oder Gruppe

- Kommutativgesetz
- Binäre Operation, Assoziativgesetz
- Neutrales Element
- Inverses Element

$+ \odot_2$

✓ $(M, \odot_1, \odot_2)$: Halbring

- $(M, \odot_1)$: abelscher Monoid
- $(M, \odot_2)$: Monoid,
- $(M, \odot_1, \odot_2)$: Distributivgesetz und Nullelement

✓ $(M, \odot_1, \odot_2)$: (abelscher, unitärer) Ring

- $(M, \odot_1)$: abelsche Gruppe
- $(M, \odot_2)$: (abelsche) Halbgruppe, (abelscher) Monoid
- $(M, \odot_1, \odot_2)$: Distributivgesetz

✓ $(M, \odot_1, \odot_2)$: Körper

- $(M, \odot_1)$: abelsche Gruppe
- $(M \backslash \{①\}, \odot_2)$: abelsche Gruppe
- $(M, \odot_1, \odot_2)$: Distributivgesetz

$+ K$

✓ $(M, \odot_1, \odot_2, K)$: Raum

- $(K, \circledcirc_1, \circledcirc_2)$: Körper
- $(M, \odot_1)$: abelsche Gruppe
- $\odot_2 : M \times K$: Skalarmultiplikation

PRODUKTVEKTORRAUM

Handelt es sich um eine Struktur der Form $(\mathbb{R}^n, +, *, \mathbb{R})$, so handelt es sich um einen **Raum**, sofern u.a. die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$(+)$ Addition:

- assoziativ *Komponentenweise Addition*
- kommutativ *Vertauschbarkeit der Komponenten*
- neutrales Element $a = (0,0,0,..,0) = (0)^n$
- inverses Element $\bar{a} = -a = (-a_1, -a_2, -a_3, \dots, -a_n) = (-a)^n$

$(*)$ Multiplikation: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ \vec{a} \in \mathbb{R}^n \wedge \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ $\beta * (\gamma * \vec{a}) = (\beta * \gamma) * \vec{a}$

- binäre Operation $\beta * \vec{a} \in \mathbb{R}$
- distributiv $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$
- assoziativ $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$
- neutrales Element $\beta \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Die Objekte, die zu einer solchen Struktur gehören, nennt man zum einen **Vektoren** $(\vec{a} \in \mathbb{R}^n)$ und zum anderen **Skalare** $(\beta \in \mathbb{R})$, d.h. ein Vektor ist eine **gerichtete Größe** (Länge und Winkel), der mittels einem Skalar (Parameter) verkürzt/ verlängert werden kann.

DAS SKALARPRODUKT

Bei der Multiplikation von zwei Vektoren nutzt man die Methodik des **inneren Produkts**.

$$\varrho(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Es werden demzufolge die einzelnen Komponenten untereinander multipliziert und die Ergebnisse anschließend addiert. Als Ergebnis bekommt man somit keinen Vektor, sondern eine **reelle Zahl**.

<u>Eigenschaften</u>:

- nicht binär $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Kommutativ $\varrho(\vec{a},\vec{b}) = \varrho(\vec{b},\vec{a})$
- Assoziativ $\beta \cdot \varrho(\vec{a},\vec{b}) = \varrho(\beta \cdot \vec{a},\vec{b}) = \varrho(\vec{a},\beta \cdot \vec{b})$
- Distributiv $\varrho(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = \varrho(\vec{a},\vec{c}) + \varrho(\vec{b},\vec{c})$
- positiv definiert $\varrho(\vec{a},\vec{a}) > 0 \wedge \vec{a} <> 0$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot b_i = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 = 3$$

ÄUßERES PRODUKT (VEKTORPRODUKT)

Eine weitere Möglichkeit zwei Vektoren zu multiplizieren ist das **äußere Produkts**.
Es wird stets diagonal multipliziert (siehe Determinaten), wobei rechts herum positiv und links herum negativ gerechnet wird.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- Binäre Operation: $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- Antikommutativ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$
- Assoziativ $\beta \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \beta \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \beta \cdot \vec{b}$
- Distributiv $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

LÄNGE / WINKEL VON VEKTOREN

Da es sich bei einem Vektor um ein n-dimensionales Objekt handelt, kann der erreichte Punkt entweder mittels Koordinaten oder via Länge und Winkel dargestellt werden.

- Länge: $\vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\varrho(\vec{a}, \vec{a})}$

  Normierter Vektor: $\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ *(Länge ist Eins)*

  Abstand $D(\vec{a}, \vec{b})$: $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$

- Winkel: $\varrho(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$

  $\Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n = \sqrt{\varrho(\vec{a}, \vec{a}) \cdot \varrho(\vec{b}, \vec{b})} \cdot cos(\alpha)$

  Cauchy-Schwarze Ungleichung $\alpha = arc\cos\frac{\varrho(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Longrightarrow -1 \leq \frac{\varrho(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \leq 1$

  Orthogonalitätskriterium: $cos(90°) = 0$

  $\Longrightarrow \varrho(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \wedge |\vec{a} <> 0| \wedge \cdot |\vec{b}| <> 0$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie – sofern möglich - das innere / äußere (im R³) Produkt der folgenden Vektoren untereinander sowie deren Summe/ Differenz und bilden Sie jeweils den normierten Vektor.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen und berechnen anschließend deren Abstände.

a)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ X \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ Y \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

LINEARE (UN)ABHÄNGIGKEIT

Grundlage der (Un)Abhängigkeit von Vektoren ist dessen **Linearkombination**, d.h. es wird jeder Vektor mit einem beliebigen **Skalar** multipliziert und anschließend die Summe gebildet.

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \cdots + \varsigma \cdot z$$

Im Fall der (Un)Abhängigkeits-Prüfung untersucht man, ob einer der Vektoren mittels einer Linearkombination der übrigen darstellbar ist, d.h. man bildet die Linearkombination der Vektoren und setzt diese Kombination gleich Null.

$$\alpha \cdot a = \beta \cdot b + \cdots + \varsigma \cdot z \iff \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \cdots + \varsigma \cdot z = 0$$

Existiert nur die sogenannte **Triviallösung** der Form $\alpha = \beta = \ldots = \zeta = 0$, dann sind die Vektoren **linear unabhängig**. Sollte eine der entstehenden Lösungen $\neq 0$ sein, dann sind sie **linear abhängig**.

<u>*Beispiel:*</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = -2 \end{matrix}$

BASIS / SPAN

In einer **Basis** sind Objekte/ Vektoren enthalten, die einen zugehörigen **n-dimensionalen** Raum komplett auf**span**nen können.

Demzufolge besteht der Euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$ aus den 3 **Koordinaten-Einheits-Vektoren**:

$$\left.\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

linear unabhängig
normiert (Länge 1)
orthogonal

} **Orthonormalsystem**

Grundvoraussetzung ist die lineare Unabhängigkeit, d.h. eine begrenzte Anzahl von linear unabhängiger Vektoren bilden eine Basis, wobei die Anzahl der enthaltenen Vektoren die Dimension des Raums angibt.

Die Dimension ist unabhängig von der Anzahl der Komponenten/ Koordinaten eines Vektors.

Beispiel: *Die drei Vektoren (letztes Beispiel) sind linear unabhängig und bilden demzufolge auch eine Basis. Da es sich um drei Basisvektoren handelt, spannen Sie einen Raum der 3. Dimension auf.*

LÖSUNGSMETHODIK

Frage*:* Bilden die gegebenen Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\left| \begin{array}{llllr} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = & 0 \\ 3\alpha & +1\beta & +1\gamma & = & 0 \\ -2\alpha & -3\beta & +5\gamma & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} |\cdot(-3) \quad |\cdot 2 \\ + \quad\quad + \\ \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{llllr} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = & 0 \\ 0 & -5\beta & +10\gamma & = & 0 \\ 0 & +1\beta & -1\gamma & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ + \\ |\cdot 5 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{llllr} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = & 0 \\ 0 & +1\beta & -1\gamma & = & 0 \\ 0 & 0 & +5\gamma & = & 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Triviallösung: Die Vektoren sind linear unabhängig.

Es handelt sich somit um eine Basis $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ mit der Dimension 3.

Somit kann durch diese Basis der $\mathbb{R}^3$ aufgespannt werden.

,

,

AUFGABEN

1) Sind die folgenden 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig?

Stellen Sie den Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2) Prüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren eine Basis bilden und geben die maximal mögliche Dimension mit dem zugehörigen Raum an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3) Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, \beta \in \Re$ so, dass das Vektorsystem (v_1, v_2, v_3) mit $v_1 = (1, \alpha, -1)^T$, $v_2 = (2,1,0)^T$ und $v_3 = (-3, -\beta, 1)^T$ linear unabhängig ist.