MATHEMATIK

04.05.2017

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Welche Eigenschaften besitzt der Vektorraum?
- ✓ Was sind Skalare?
- ✓ Was hat der Körper mit dem Raum zu tun?
- ✓ Was ist der Produktvektorraum?
- ✓ Wie wird das innere Produkt von Vektoren bestimmt?
- ✓ Wie berechnet man das äußere Produkt (Vektorprodukt)?
- ✓ Wie bestimmt man den Winkel bzw. die Länge von Vektoren?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

RAUM I

Für die Raumbetrachtung ergänzen wir die Struktur des Körpers um eine weitere Menge. Hierbei wird die Menge der Variablen (**Vektoren**) durch die der Parameter (**Skalare**) ergänzt und man prüft hinsichtlich dieser Kombination verschiedene Eigenschaften.

$$(V, \odot_1, \odot_2, K)$$

Die Menge $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \dots\}$ bezeichnet man als **Skalare**.
Die Menge V= $\{a, b, c, \dots\}$ bezeichnet man als **Vektoren**.

Damit die algebraische Struktur einen Raum bildet müssen auch hier einige bereits bekannte Eigenschaften und einige neue erfüllt sein.

- ✓ $(K, \odot_1, \odot_2)$ ist eine Körper
  - ➢ achten Sie auf den definierten Operator $\odot_1$ (Körperaddition)
  - ➢ achten Sie auf den definierten Operator $\odot_2$ (Körpermultiplikation)
- ✓ $(V, \odot_1)$ ist eine abelsche Gruppe
  - ➢ achten Sie auf den definierten Operator$\odot_1$(Gruppenaddition)

RAUM II

$$(V, \odot_1, \odot_2, K)$$

Nun wurden separat die beiden Mengen der Skalare und Vektoren und die definierten Operatoren betrachtet. Allerdings wurde noch nicht die Kombination aus beiden Mengen $K \times V$ und der zweite Operator der Vektoren $\odot_2$ untersucht.

✓ $K \times V \rightarrow V$ Skalarmultiplikation

- Binäre Operation: $K \odot_2 V \rightarrow V$
- Assoziativgesetz: $\beta \odot_2 (\gamma \odot_2 a) = (\beta \odot_2 \gamma) \odot_2 a; a \in V;\ \beta, \gamma \in K$
- Neutrales Element: $a \odot_2 ① = a; a \in V; ① \in K$
- Distributivgesetz: $(\beta \odot_1 \gamma) \odot_2 a = \beta \odot_2 a \odot_1 \gamma \odot_2 a; a \in V;\ \beta, \gamma \in K$

  $\beta \odot_2 (a \odot_2 b) = \beta \odot_2 a \odot_2 \beta \odot_2 b; a, b \in V;\ \beta \in K$

Sind alle diese Eigenschaften gleichzeitig erfüllt, dann handelt es sich um einen **Vektorraum**.

- reeller Vektorraum $(\mathbb{R}^n, +, *, \mathbb{R})$: $\mathbb{R}$ - Vektorraum
- Komplexer Vektorraum $(\mathbb{C}^n, +, *, \mathbb{C})$: $\mathbb{C}$- Vektorraum

ZUSAMMENFASSUNG

✓ $(M, \odot_1)$: (abelscher) Halbgruppe, Monoid oder Gruppe

- Kommutativgesetz
- Binäre Operation, Assoziativgesetz
- Neutrales Element
- Inverses Element

$+ \odot_2$

✓ $(M, \odot_1, \odot_2)$: Halbring

- $(M, \odot_1)$: abelscher Monoid
- $(M, \odot_2)$: Monoid,
- $(M, \odot_1, \odot_2)$: Distributivgesetz und Nullelement

✓ $(M, \odot_1, \odot_2)$: (abelscher, unitärer) Ring

- $(M, \odot_1)$: abelsche Gruppe
- $(M, \odot_2)$: (abelsche) Halbgruppe, (abelscher) Monoid
- $(M, \odot_1, \odot_2)$: Distributivgesetz

✓ $(M, \odot_1, \odot_2)$: Körper

- $(M, \odot_1)$: abelsche Gruppe
- $(M \setminus \{①\}, \odot_2)$: abelsche Gruppe
- $(M, \odot_1, \odot_2)$: Distributivgesetz

$+ K$

✓ $(M, \odot_1, \odot_2, K)$: Raum

- $(K, \circledcirc_1, \circledcirc_2)$: Körper
- $(M, \odot_1)$: abelsche Gruppe
- $\odot_2 : M \times K$: Skalarmultiplikation