MATHEMATIK

19.04.2018

WIEDERHOLUNG

Wird ein weiterer Operator zu einer Menge hinzugefügt, so kann ein__________, ein Ring oder maximal ein ________________, abelscher Ring entstehen.

Um einen Ring zu erhalten, muss für den ersten Operator zusätzlich das __________ Element existieren, so dass eine ________ entsteht.
Für den zweiten Operator muss das ________________ Element nicht mehr existieren, so dass hier eine ________________ vorhanden ist.

Ist auch die zweite Verknüpfung ein _____________, so handelt es sich um einen unitären Ring.

Bei dem Test des ________________ muss der Operator links- und rechtsseitig getestet werden.

Das Nullelement beschreibt die ________________ des neutralen Elements des ersten Operators beim Einsatz mittels des ________________ Operators.

Gilt für beide Operatoren auch das ________________, so ist die Struktur abelsch.

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Wann existiert ein Körper?
- ✓ Warum verändert man die Welt des 2. Operators?
- ✓ Warum helfen die Strukturen bei der Lösung von Gleichungen?
- ✓ Welche Voraussetzung besitzt ein Raum?
- ✓ Worin unterscheiden sich Vektor und Skalar?
- ✓ Warum muss man auf die verschiedenen Definitionen achten
- ✓ Was ist die Skalarmultiplikation?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

KÖRPER I

Für die Struktur eines Körpers betrachten wir weiterhin zwei Operatoren bzgl. einer Menge.

Wenn man davon ausgeht, dass die algebraische Struktur $(M, \odot_1, \odot_2)$ einen abelschen unitären Ring darstellt, dann ist die einzige fehlende Eigenschaft das inverse Element bzgl. des zweiten Operators $\odot_2$.

Damit das inverse Element für $(M, \odot_2)$ problemlos existieren kann, schließt man das neutrale Element der ersten Verknüpfung $\odot_1$ aus.
Somit wird aus der Struktur $(M, \odot_2)$ eine abelsche Gruppe.

✓ $(M, \odot_1)$ ist eine abelscher Gruppe

- Binäre Operation: $M \odot_1 M \rightarrow M$
- Assoziativgesetz: $(a \odot_1 b) \odot_1 c = a \odot_1 (b \odot_1 c)$
- Neutrales Element: $a \odot_1 ① = a$
- Inverses Element: $a \odot_1 \bar{a} = ①$
- Kommutativgesetz: $a \odot_1 b = b \odot_1 a$

KÖRPER II

$$(M, \odot_1, \odot_2)$$

- ✓ $(M \backslash \{①\}, \odot_2)$ ist eine abelscher Gruppe
  - ➢ Binäre Operation: $M \odot_1 M \rightarrow M$
  - ➢ Assoziativgesetz: $(a \odot_1 b) \odot_1 c = a \odot_1 (b \odot_1 c)$
  - ➢ Neutrales Element: $a \odot_1 ② = a$
  - ➢ Inverses Element: $a \odot_1 \bar{a} = ②$
  - ➢ Kommutativgesetz: $a \odot_1 b = b \odot_1 a$

- ✓ $(\odot_1, \odot_2)$ erfüllen links- und rechtseitig das Distributivgesetz:
  - ➢ linksseitig: $a \odot_2 (b \odot_1 c) = (a \odot_2 b) \odot_1 (a \odot_2 c)$
  - ➢ rechtsseitig: $(a \odot_1 b) \odot_2 c = (a \odot_2 c) \odot_1 (b \odot_2 c)$

BEISPIEL KÖRPER I

Mit den Operatoren der Addition und Multiplikation wie sie in der Arithmetik definiert sind basierend auf den reellen Zahlen kann man den Körper wie im folgenden Beispiel beweisen.

$$(\mathbb{R}, +, *)$$

- ✓ $(\mathbb{R}, +)$ ist eine abelsche Gruppe:
  - Binäre Operation: $\mathbb{R} + \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
  - Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c); a, b, c \in \mathbb{R}$
  - Neutrales Element: $a + 1 = a + 0 = a; 0 \in \mathbb{R}$
  - Inverses Element: $a + \bar{a} = 0 \Rightarrow \bar{a} = -a \in \mathbb{R}$
  - Kommutativgesetz: $a + b = b + a; a, b \in \mathbb{R}$

Da das neutrale Element der Addition die Null ist, muss diese in der Menge für die Untersuchung der zweiten Verknüpfung (Multiplikation) ausgeschlossen werden.

Warum ist diese Einschränkung für die Gruppeneigenschaft unumgänglich?

BEISPIEL KÖRPER II

$(\mathbb{R}, +, *)$

- ✓ $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, *)$ ist eine abelsche Gruppe:
  - ➢ Binäre Operation: $\mathbb{R} * \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - ➢ Assoziativgesetz: $(a * b) * c = a * (b * c); a, b, c, \in \mathbb{R}$
  - ➢ Neutrales Element: $a * 2 = a * 1; 1 \in \mathbb{Z}$
  - ➢ Inverses Element: $a * \bar{a} = 2 = 1 \Rightarrow \bar{a} = \frac{1}{a}; \bar{a} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
    Wenn hier die Null noch zur Menge gehören würde, dann könnte kein inverses Element existieren und somit wäre es auch keine Gruppe.
  - ➢ Kommutativgesetz: $a * b = b * a; a, b \in \mathbb{R}$
- ✓ $(+, *)$ erfüllen links- und rechtseitig das Distributivgesetz:
  - ➢ linksseitig: $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
  - ➢ rechtsseitig: $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

AUFGABEN

1) Warum handelt es sich bei der Struktur $(\mathbb{Z}, +,*)$ nicht um einen Körper?

2) Zeigen Sie, dass die algebraische Struktur $(\{0,1\}, +,*)$ einen Körper bildet, wenn die Verknüpfung $+,*$ wie folgt definiert ist.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

3) Beweisen Sie, dass in einem Körper $(K, +,*)$ die Gleichung $a * x + b = c$ mit $a \neq 0$ eindeutig lösbar ist.

4) Bildet die algebraische Struktur $\left(\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\}, +,*\right)$ mit den üblichen Rechenoperationen der rationalen Zahlen einen Körper?

5) Zeigen Sie, dass es sich bei den komplexen Zahlen und deren Addition / Multiplikation um einen Körper handelt.