MATHEMATIK

24.04.2017

WIEDERHOLUNG

Wenn man mindestens einen Operator mit einer definierten Menge in Verbindung setzt, dann fällt es unter dem Bereich der _________________Strukturen.

Bei der kleinsten möglichen Struktur handelt es sich um eine ________________.

Eine Gruppe existiert, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

- ________________ Operation
- Assoziativgesetz
- ________________ Element
- ________________ Element

Man spricht von einer binären Operation, wenn durch die Rechnung die vorhandene Welt ______ ___________ wird. Ist diese Eigenschaft nicht erfüllt liegt ______ Struktur vor.

Wenn bei einer Struktur zusätzlich noch das ________________ (Vertauschungsgesetz) gilt, dann wird sie ________________ genannt.

Ohne diese Eigenschaft muss darauf geachtet werden, ob man die Operation ___________ oder ________________ zum Lösen einer Gleichung nutzt.

AUFGABEN

1) Beweisen Sie die maximal mögliche Struktur für die Menge $M = \{e^{2x+1}; x \in \mathbb{N}\}$ und der in der Arithmetik definierten Division: $(M, \div)$

2) Ist die Struktur $(A, *)$ mit der Menge $A = \{1; -1\}$ und der üblichen Multiplikation ganzer Zahlen eine Halbgruppe oder eine Gruppe (Begründung).

3) Seien A eine beliebige Menge, die Operationen $\cup, \cap$ die Vereinigung und der Durchschnitt von Mengen und $P(A)$ die Potenzmenge von A.

   Ist die Struktur $(P(A), \cup)$ bzw. $(P(A), \cap)$ eine Halbgruppe, ein Monoid oder eine Gruppe?

HALBRING I

Ähnlich wie bei dem letzten Beispiel, kann man die Strukturen auch durch einen zweiten Operator erweitern und analysieren. Die Eigenschaften auf jeden einzelnen Operator bezogen sind die gleichen wie im vorherigen Kapitel der Gruppe.

$$(M, \odot_1, \odot_2)$$

- ✓ $(M, \odot_1)$ ist ein abelscher Monoid:
  - ➢ Binäre Operation: $M \odot_1 M \to M$
  - ➢ Assoziativgesetz: $(a \odot_1 b) \odot_1 c = a \odot_1 (b \odot_1 c)$
  - ➢ Neutrales Element: $a \odot_1 ① = a$
  - ➢ Kommutativgesetz: $a \odot_1 b = b \odot_1 a$

- ✓ $(M, \odot_2)$ ist ein Monoid:
  - ➢ Binäre Operation: $M \odot_2 M \to M$
  - ➢ Assoziativgesetz: $(a \odot_2 b) \odot_2 c = a \odot_2 (b \odot_2 c)$
  - ➢ Neutrales Element: $a \odot_2 ② = a$

HALBRING II

$$(M, \odot_1, \odot_2)$$

- ✓ $(\odot_1, \odot_2)$ erfüllen links- und rechtseitig das Distributivgesetz:
  - linksseitig: $a \odot_2 (b \odot_1 c) = (a \odot_2 b) \odot_1 (a \odot_2 c)$
  - rechtsseitig: $(a \odot_1 b) \odot_2 c = (a \odot_2 c) \odot_1 (b \odot_2 c)$
- ✓ $\odot_2$ besitzt das Nullelement, d.h. das neutrale Element zu $\odot_1$ ist für $\odot_2$ dominant:
  - Nullelement: $a \odot_2 ① = ① \odot_2 a = ①$

  Nimmt man zum Beispiel die herkömmliche Addition so existiert das neutrale Element $① = 0$. Nutzt man dies in Bezug auf die arithmetische Multiplikation, so erkennt man das die Null hier dominant ist, denn es gilt $a * 0 = 0 * a = 0$.

BEISPIEL HALBRING I

Betrachten wir nun eine Struktur basierend auf den natürlichen Zahlen und der in der Arithmetik definierten Addition und Multiplikation.

$$(\mathbb{N}, +, *)$$

- ✓ $(\mathbb{N}, +)$ ist ein abelscher Monoid:
  - Binäre Operation: $\mathbb{N} + \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
  - Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c); a, b, c \in \mathbb{N}$
  - Neutrales Element: $a + 1 = a + 0 = a; 0 \in \mathbb{N}$
  - Kommutativgesetz: $a + b = b + a; a, b \in \mathbb{N}$

- ✓ $(\mathbb{N}, *)$ ist ein Monoid:
  - Binäre Operation: $\mathbb{N} * \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
  - Assoziativgesetz: $(a * b) * c = a * (b * c); a, b, c, \in \mathbb{N}$
  - Neutrales Element: $a * 2 = a * 1; 1 \in \mathbb{N}$

BEISPIEL HALBRING II

$$(\mathbb{N}, +, *)$$

- ✓ $(+, *)$ erfüllen links- und rechtseitig das Distributivgesetz:
  - ➢ linksseitig: $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
  - ➢ rechtsseitig: $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

- ✓ Die Multiplikation besitzt das Nullelement,
  d.h. das neutrale Element zur Addition ist für die Multiplikation dominant:
  - ➢ Nullelement: $a * 0 = 0 * a = 0$

  Wie man erkennt liegt hier ein Halbring vor.
  Da die Multiplikation auch noch kommutativ ist, also $a * b = b * a$; $a, b \in \mathbb{N}$ gilt, haben wir sogar einen **abelschen Halbring**.

RING I

Im Wesentlichen handelt es sich bei einem Ring um einen Halbring, wobei einige Eigenschaften zusätzlich vorhanden sein müssen bzw. andere entfallen.

$$(M, \odot_1, \odot_2)$$

- ✓ $(M, \odot_1)$ ist eine abelscher Gruppe – das inverse Element muss zusätzlich existieren:
  - Binäre Operation: $M \odot_1 M \to M$
  - Assoziativgesetz: $(a \odot_1 b) \odot_1 c = a \odot_1 (b \odot_1 c)$
  - Neutrales Element: $a \odot_1 ① = a$
  - Inverses Element: $a \odot_1 \bar{a} = ①$
  - Kommutativgesetz: $a \odot_1 b = b \odot_1 a$
- ✓ $(M, \odot_2)$ ist eine Halbgruppe – das neutrale Element muss nicht existieren:
  - Binäre Operation: $M \odot_2 M \to M$
  - Assoziativgesetz: $(a \odot_2 b) \odot_2 c = a \odot_2 (b \odot_2 c)$

RING II

$$(M, \odot_1, \odot_2)$$

- ✓ $(\odot_1, \odot_2)$ erfüllen links- und rechtseitig das Distributivgesetz:
  - linksseitig: $a \odot_2 (b \odot_1 c) = (a \odot_2 b) \odot_1 (a \odot_2 c)$
  - rechtsseitig: $(a \odot_1 b) \odot_2 c = (a \odot_2 c) \odot_1 (b \odot_2 c)$

Das Nullelement muss für die Existenz eines Rings nicht mehr vorhanden sein.

Ist für den 2. Operator $\odot_2$ das neutrale Element definiert, d.h. gilt $a \odot_2 ② = a$, dann handelt es sich auch wieder um einen Monoid (ggf. kommutativ), so dass man die Struktur auch als Ring mit Einselement oder unitären Ring bezeichnet.

Für den Fall, dass die 2. Verknüpfung kommutativ ist, dann wird auch dieser Ring abelsch.

BEISPIEL RING I

Bei dem vorherigen Beispiel, konnte das inverse Element aufgrund der Mengendefinition nicht existieren. Also erweitern wir die Zahlen um den negativen Bereich.

$$(\mathbb{Z}, +, *)$$

- ✓ $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe:
  - Binäre Operation: $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
  - Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c); a, b, c \in \mathbb{Z}$
  - Neutrales Element: $a + 1 = a + 0 = a; 0 \in \mathbb{Z}$
  - Inverses Element: $a + \bar{a} = 0 \Rightarrow \bar{a} = -a \in \mathbb{Z}$
  - Kommutativgesetz: $a + b = b + a; a, b \in \mathbb{Z}$

- ✓ $(\mathbb{Z}, *)$ ist eine Halbgruppe:
  - Binäre Operation: $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
  - Assoziativgesetz: $(a * b) * c = a * (b * c); a, b, c, \in \mathbb{Z}$

BEISPIEL RING II

$$(\mathbb{Z}, +, *)$$

- ✓ $(+, *)$ erfüllen links- und rechtseitig das Distributivgesetz:
  - ➢ linksseitig: $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
  - ➢ rechtsseitig: $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$
- ✓ $(\mathbb{Z}, *)$ ist sogar abelscher Monoid:
  - ➢ Neutrales Element: $a * 2 = a * 1; 1 \in \mathbb{Z}$
  - ➢ Kommutativgesetz: $a * b = b * a; a, b \in \mathbb{Z}$

Dadurch dass die Multiplikation basierend auf den ganzen Zahlen sogar ein kommutativer Monoid ist, handelt es sich bei der Struktur $(\mathbb{Z}, +, *)$ um einen **abelschen, unitären Ring**.

AUFGABEN

1) Beweisen Sie die maximal mögliche Struktur für die Menge $M = \{ld(x); x \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ und $(M,\circledast,\oslash)$ mit den beiden Operatoren $\circledast$: Multiplikation und $\oslash$: Division.

$$\circledast: ld(x) \circledast ld(y) = ld(x+y)$$
$$\oslash: ld(x) \oslash ld(y) = ld(x-y)$$

2) Bildet die algebraische Struktur $(\{a + b \cdot \sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\},+*)$ mit den üblichen Rechenoperationen in der Menge der rationalen Zahlen einen Ring?