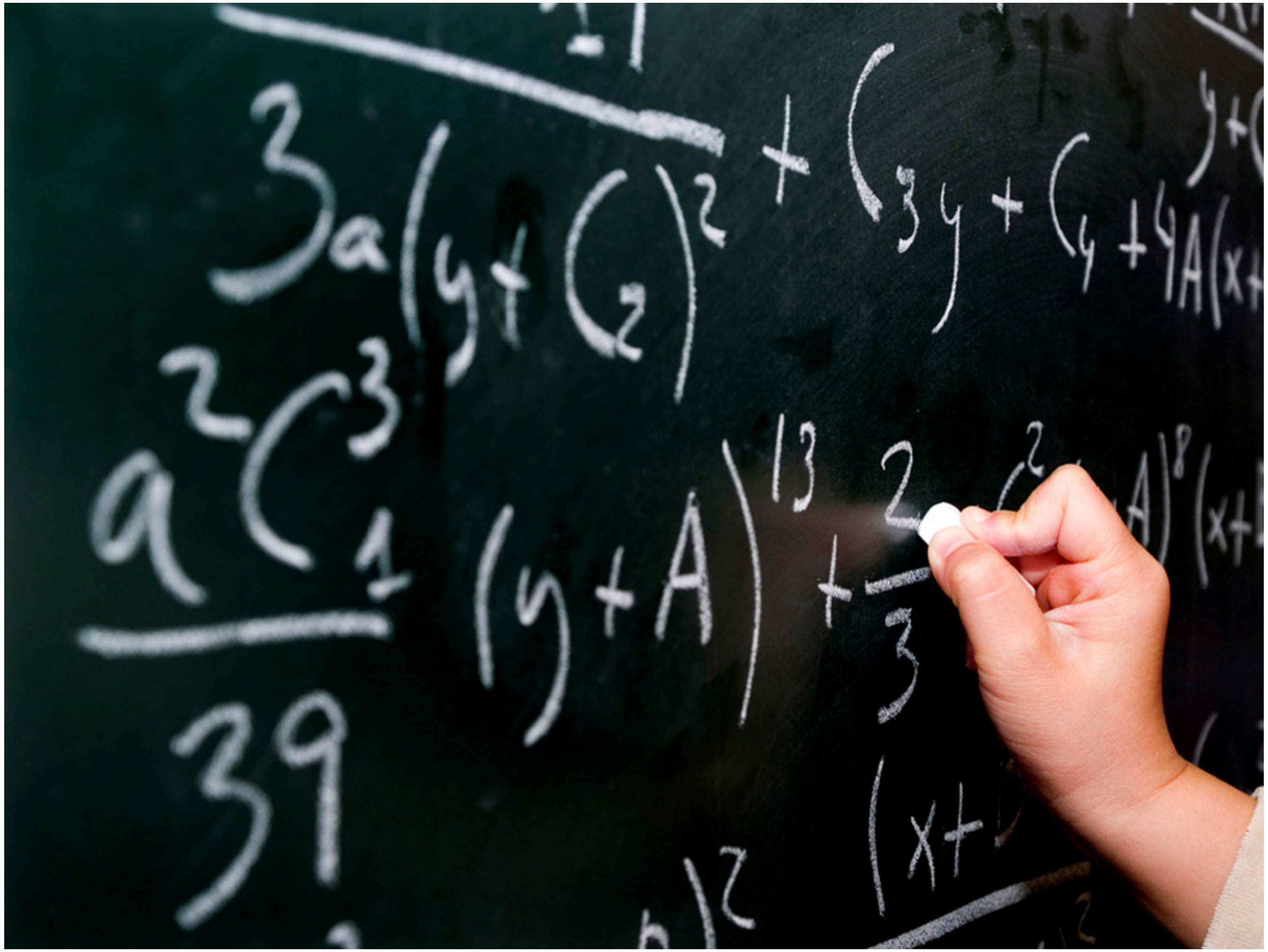
Mathematik II (BW27)



Mathematik (BW27)

Lernziele / Kompetenzen

Die Studierenden beherrschen den Umgang mit grundlegenden Begriffen und Methoden der linearen Algebra und können diese zur Lösung anwendungsbezogener Fragestellungen im Umfeld der Informatik anwenden. Sie kennen die Theorie der Gruppen, Ringe und Körper und die Zusammenhänge mit Vektorräumen.

Die Studierenden kennen grundlegende Begriffe, Probleme, Konzepte, Modelle, Methoden und Verfahren der Statistik und Finanzmathematik.

Die Studierenden sind in der Lage, ähnliche oder neue Probleme aus den verschiedensten Anwendungsbereichen als Probleme der Statistik bzw. Finanzmathematik zu formulieren und mit geeigneten Verfahren zu lösen.

Die Studierenden erwerben Kompetenzen, die ihnen erlauben, selbständig weiterführende Lernprozesse zu gestalten und sich mit Fachvertretern und mit Laien über Ideen, Probleme und Lösungen auszutauschen.

Es werden abstraktes und logisches Denken sowie systematische und methodische Vorgehensweisen geschult.

Mathematik (BW27)

Themengebiete

- ✓ **Einfache Algebraische Strukturen:**
  Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume, Boolsche Algebra
- ✓ **Vektorrechnung**:
  Operationen, Skalarprodukt, Vektorprodukt, Normen, lineare Abhängigkeit und Basis
- ✓ **Matrizenrechnung**:
  Operationen, Rang, Determinante, Inverse
- ✓ **Lineare Gleichungssysteme:**
  Rangkriterium von Frobenius und Lösbarkeit von Gleichungssysteme
- ✓ **Wahrscheinlichkeitsrechnung:**
  Ereignisse und Eintrittswahrscheinlichkeit, Bedingte Wahrscheinlichkeiten
- ✓ **Statistik**:
  Verteilungsfunktionen, Kenngrößen (Erwartungswert, Varianz, Median etc.)
- ✓ **Finanzmathematik**:
  Zins-und Tilgungsrechnung, Rentenrechnung

Literaturverzeichnis

Bereich	Autor	Titel	Zusatz	Verlag	ISBN
Algebra		Lehr- und Übungsbuch Mathematik	Band 4	Harri Deutsch	3-8171-1123-1
Algebra	Papula	Mathematik für Ingenieure	Band 2	Vieweg	3-528-94237-1
Algebra	Teschl	Mathematik für Informatiker	Band 1	Springer	978-3-540-70824-7
Analysis		Lehr- und Übungsbuch Mathematik	Band 3	Harri Deutsch	3-87144-403-0
Analysis	Papula	Mathematik für Ingenieure	Band 1	Vieweg	3-528-94236-3
Aufgaben	Papula	Mathematik für Ingenieure	Aufgabensammlung	Vieweg	978-38348-0157-9
Mathematik	Hartmann	Mathematik für Informatiker	Lehrbuch	Vieweg	3-8348-0096-1
Formelsammlung	Bartsch	Mathematische Formeln	Taschenbuch	Harri Deutsch	3-87144-774-9
Formelsammlung	Papula	Mathematische Formelsammlung	Formeln	Vieweg	3-528-74442-1
Grundlagen		Lehr- und Übungsbuch Mathematik	Band 1	Harri Deutsch	3-87144-401-4
Grundlagen		Lehr- und Übungsbuch Mathematik	Band 2	Harri Deutsch	3-87144-402-2
Grundlagen	Schwarze	Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler	Aufgabensammlung	NWB	3-482-43315-1
Grundlagen	Schwarze	Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler	Band1: Grundlagen	NWB	3-482-51561-1
Grundlagen	Schwarze	Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler	Elementare Grundlagen für Studienanfänger	NWB	3-482-56646-1
Finanzmathematik	Purkert	Brückenkurs Mathematik	Wirtschaftswissenschaftler	Vieweg	978-3-8348-1505-7
Finanzmathematik	Locarek	Finanzmathematik	Lehr- und Übungsbuch	Oldenbourg	3-486-24040-4
Statistik	Papula	Mathematik für Ingenieure	Band 3	Vieweg	3-528-34937-9
Statistik	Schwarze	Grundlagen der Statistik	Band 1: Beschreibende Verfahren	nwb Studium	978-3-482-59481-6
Statistik	Schwarze	Aufgabensammlung zur Statistik	Aufgaben mit Lösungen	nwb Studium	978-3-482-43456-3

ZIELSETZUNG

Themen, die Sie nach dieser Veranstaltung kennen sollten:

- ✓ Was versteht man unter algebraischen Strukturen?
- ✓ Welche Eigenschaften werden untersucht?
- ✓ Worin liegt der Unterschied zwischen Monoid und Gruppe?
- ✓ Was passiert durch einen weiteren Operator
- ✓ Was bewirkt ein Nullelement?
- ✓ Warum unterscheidet man link- und rechtsseitige Opertationen?
- ✓ Für was nutzt man die Struktur eines Rings?
- ✓ Aufgaben und Übungen zu den benannten Themen.

ALGEBRAISCHE STRUKTUREN I

Bei einer algebraischen Struktur handelt es sich im Prinzip um einen ähnlichen Aufbau wie bei einer Relation $\{Tupel \in Welt | Bedingung\}$, wobei nun zusätzlich zu einer Menge auch noch Operatoren hinzugefügt werden. Somit entsteht die allgemeine Definition in der Form:

$$(Menge, Operator(en)) : \{Tupel \in Welt | Definition\ der\ Operator(en)\}$$

Welche Eigenschaften kann eine Struktur aus einer Menge und einem Operator besitzen?

- ✓ <u>Binäre Operation:</u>
  Wenn der Operator verwendet wird, bleibt das Resultat in der definierten Welt (Menge).

- ✓ <u>Assoziativgesetz:</u>
  Die Klammern können bei Verwendung des Operators beliebig vertauscht werden.

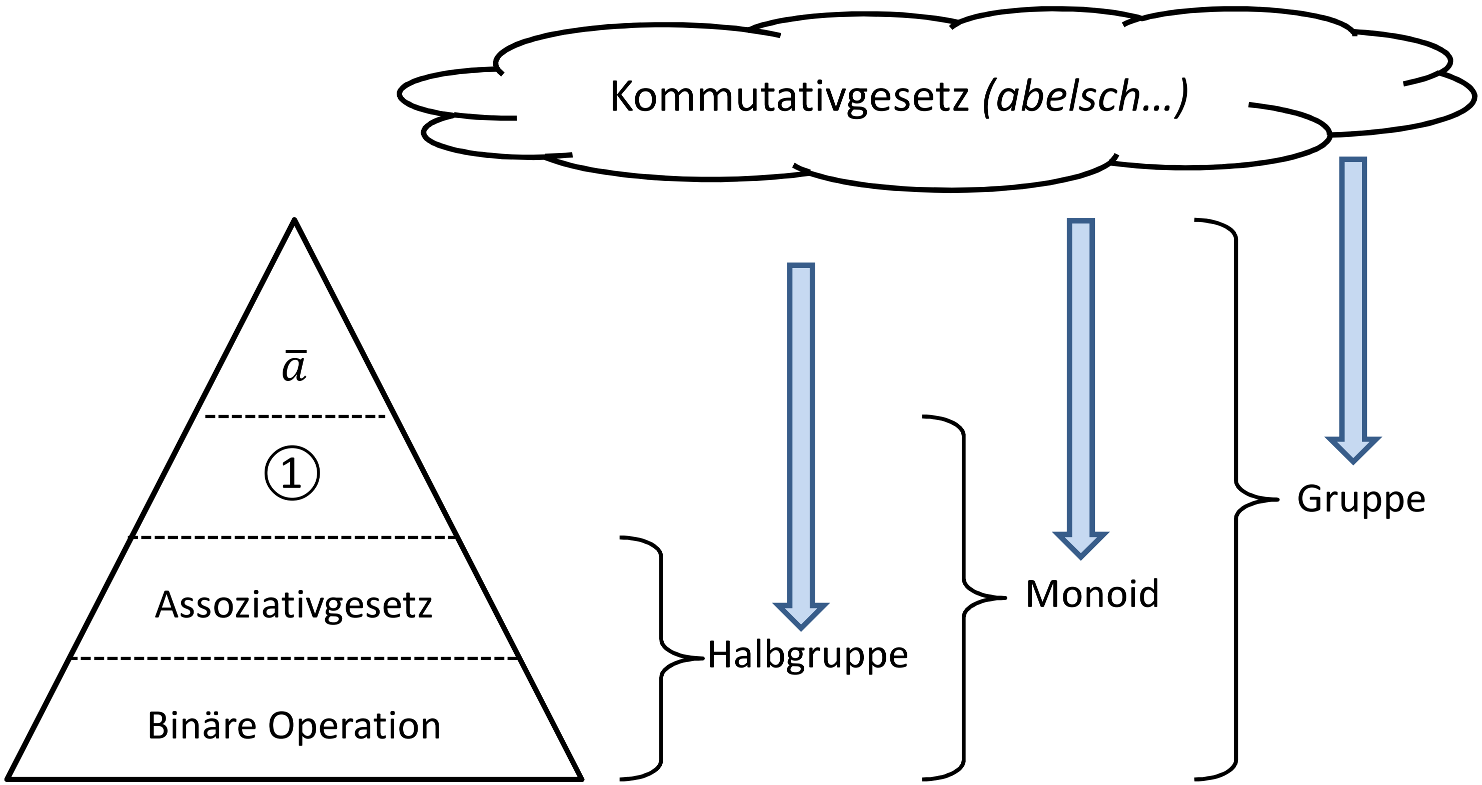
- ✓ <u>Neutrales Element:</u>
  Es gibt ein Element aus der Menge, das durch den Operator nichts verändert.

- ✓ <u>Inverses Element:</u>
  Es gibt ein Element aus der Menge, durch dass man das neutrale Element erhält.

- ✓ <u>Kommutativgesetz (Bonus)</u>:
  Die Elemente, die für die Verwendung der Operation benötigt werden, können beliebig getauscht werden.

ALGEBRAISCHE STRUKTUREN II

Betrachtet man die definierten Eigenschaften nur für eine Menge und einen Operator, so kann man darauf basierend eine Art Bedürfnispyramide einer algebraischen Struktur definieren.



BEISPIEL GRUPPE I

Betrachten wir die Menge der ganzen Zahlen mit der Addition als Operator und den folgenden Situationen, wobei wir nach und nach die Welt anpassen:

I. $(\mathbb{Z}^+, +)$:

- ✓ <u>Binäre Operation:</u>
  Aufgrund der Definition der arithmetischen Addition gilt $a + b = c$ *mit* $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$

- ✓ <u>Assoziativgesetz:</u>
  In der Arithmetik ist das Assoziativgesetz bzgl. der Addition gültig, denn
  $(a + b) + c = a + (b + c)$ *für* $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$

- ✓ <u>Kommutativgesetz:</u>
  In der Arithmetik ist auch das Kommutativgesetz für die Addition gültig, denn
  $a + b = b + a$ *für* $a, b \in \mathbb{Z}^+$

Da das neutrale Element der Addition nicht in der Menge $\mathbb{Z}^+$ existiert handelt es sich zunächst um eine Halbgruppe.
Aufgrund des gültigen Kommutativgesetzes haben wir eine **abelsche Halbgruppe**.

BEISPIEL GRUPPE II

Nun verändern wir die Menge, in dem wir die Null hinzufügen:

II. $(\mathbb{Z}^{\geq 0}, +)$:

- ✓ *Da die zuvor bewiesenen Eigenschaften der abelschen Halbgruppe weiterhin gültig sind, muss nur noch die Existenz des neutralen und inversen Elements untersucht werden.*

- ✓ <u>Neutrales Element:</u>
  Das neutrale Element existiert in der vorhandenen Menge $\mathbb{Z}^{\geq 0}$, denn es gilt
  $a + ① = a + 0 = a$ mit $① = 0$ und $0 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

Da jedoch das inverse Element der Addition nicht in der Menge $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ existiert, handelt es sich quais um eine abelsche Halbgruppe mit zusätzlich einem neutralen Element.

Eine solche Struktur wird auch **abelscher Monoid** genannt.

BEISPIEL GRUPPE III

Nun verändern wir erneut die Menge, in dem wir alle ganzen Zahlen verwenden:

III. $(\mathbb{Z}, +)$:

- ✓ *Auch hier gelten die zuvor bewiesenen Eigenschaften des abelschen Monoid weiterhin, wodurch nur noch die Existenz des inversen Elements bewiesen werden muss.*

- ✓ <u>Inverses Element:</u>
  Das inverses Element existiert in der vorhandenen Menge $\mathbb{Z}$, denn es gilt
  $a + \overline{a} = 1 \Leftrightarrow a + (-a) = 1 = 0$ mit $\overline{a} = -a$ und $-a \in \mathbb{Z}$.

Aufgrund der momentanen Veränderung, haben wir hier einen abelschen Monoid inkl. eines inversen Elements.

Eine solche Struktur existiert mit den maximal möglichen Eigenschaften und ist somit eine **abelsche Gruppe**.

AUFGABEN

1) Beweisen Sie die maximal mögliche Struktur für die Menge $M = \{10^x; x \in \mathbb{Q}\}$ und der in der Arithmetik definierten Multiplikation: $(M,\cdot)$

2) Gegeben ist die Struktur $(M, \odot)$ mit $a, b \in M$ in Form einer abelschen Gruppe. Zeigen Sie, dass die Gleichung $a \odot x = b$ eindeutig lösbar ist.

3) Es ist eine Menge in Form des kartesischen Produkts der reellen Zahlen definiert $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ und die folgende Struktur $(M, \oplus)$.

   Die Operation $\oplus$ wird wie folgt definiert: $\{(a, b) \in M \times M |\ a \oplus b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\}$

   Welche algebraische Struktur liegt hier vor. Beweisen Sie jede vorhandene Eigenschaft.