Eigenwerte: $\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

Eigenvektoren: $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = 0$$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$-\lambda^3 - \lambda^2 + 10\lambda + 43$

$-$

$43 + 8\lambda$

2) Lösen Sie die gegebene Gleichung mit Hilfe der Cramerschen Regel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} * \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \quad \vec{x} = (1; 1; 2)^T$

1) $\det(A - \lambda E) = 0$

$$(2 - 3\lambda + \lambda^2) \cdot (-4 - \lambda)$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{array}{c} (2-\lambda) \cdot (1-\lambda) \cdot (-4-\lambda) \\ +45 + 6 \\ - \\ -5 \cdot (1-\lambda) - 9 \cdot (-4-\lambda) + 6(2-\lambda) \end{array}$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$-\lambda \cdot (\lambda^2 + \lambda - 2) = -\lambda\,(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \;\vee\; \lambda_2 = -2 \;\vee\; \lambda_3 = 1$$

$$\lambda = 0 \quad : \qquad (A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-0 & -3 & 1 \\ 3 & 1-0 & 3 \\ -5 & 2 & -4-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 1x_1 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{array} \right| \qquad |\cdot(-3) \quad + \qquad |\cdot 4 \quad +$$

$$\left| \begin{array}{l} -3x_1 + 10x_2 = 0 \\ 3x_1 - 10x_2 = 0 \end{array} \right| \; + \qquad 0 = 0$$

$$x_1 = 10 \quad \Rightarrow \quad 30 - 10x_2 = 0 \qquad x_2 = 3$$

$$\mathrm{I}: \quad 20 - 9 + x_3 = 0 \qquad x_3 = -11$$

$$\vec{x} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1 \quad : \quad (-1\,;\,0\,;\,1)^T$

$\lambda = -2 \quad : \quad (4\,;\,3\,;\,-7)^T$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\left| \begin{array}{l} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -5x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right| \quad |\cdot(-3) \quad |\cdot 2$$

$$\left| \begin{array}{l} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -9x_1 + 12x_2 + 0 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 0 = 0 \end{array} \right| \quad |\cdot 3 \qquad 0 = 0$$

$x_1 = 4$

$12 - 4x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$

I:

$16 - 9 + x_3 = 0$

$x_3 = -7$

$\Downarrow$

$$\vec{x} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \quad \cdot(-3)$$

Koeffizienten Matrix ⟵ A

$\vec{b}$ ⟶ Lösungsvektor

$(A|b)$ ⟶ erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & \alpha-9 & \beta-6 \end{array}\right) \quad \cdot 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-4 & \beta+9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-4 & \beta+9 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = \text{Zahl} \\ \text{Zahl} = \text{egal} \end{cases}$$

I. $0 = 0$: $\quad \alpha = 4 \wedge \beta = -9$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 <> 0 \Rightarrow Rg(A) = 2 \\ \det(A|b) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 <> 0 \Rightarrow Rg(A|b) = 2 \end{array}\right\} =$$

$\Rightarrow$ lösbar mit unendlichen Lösungen

$\underline{II}$ ϑ = Zahl : $\alpha = 4 \wedge p <> -9$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & <> \vartheta \end{array}\right)$$

$\hookrightarrow p+9$

$$\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \mathrm{Rg}(A) = 2$$

ξ

$$\mathrm{Det}(A|b) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & p+9 \end{vmatrix} = p+9 <> 0 \quad \Rightarrow \mathrm{Rg}(A|b) = 3$$

$\Rightarrow$ nicht lösbar

III. Zahl = egal : $\alpha <> 4 \wedge \beta \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-4 & \beta+9 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-4 \end{vmatrix} = \alpha - 4 <> 0$$

$\Rightarrow Rg(A) = 3$ (Maximalrang)

$Rg(A|b) = 3$

$\alpha = 4 \quad \wedge \quad \beta = -9$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + x_3 = 3 \end{array}\right|$$

$$x_3 = r \qquad \left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3r = 2 \\ \qquad x_2 + r = 3 \end{array}\right| \qquad x_2 = 3 - r$$

$$x_1 + 2 \cdot (3 - r) + 3 \cdot r = 2$$

$$x_1 + 6 - 2r + 3r = 2$$

$$x_1 = -4 - r$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 - r \\ 3 - r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r \\ -r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$