AUFGABEN

1) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem und geben die Lösungsmenge als Vektor an.

a) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -11 \\ -x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & -9 \\ 8x_1 & - & 6x_2 & - & 8x_3 & = & 24 \end{array}\right|$

2) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Matrizengleichung.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = (-1; 2; 3)^T$ $\vec{x} = (8; 21; -2; 3)^T$

2) a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\cdot(-4) \quad |\cdot(-5) \\ + \\ \quad\quad\quad\;\; + \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ |\cdot(-7) \\ |\cdot 8 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -56 & 35 & -7 \\ 0 & 56 & -32 & 16 \end{array}\right) \quad +$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow (-1\,;\,2;\,3)^T$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 3 & 2 \\
-1 & -1 & -2 & 1 \\
3 & 1 & \alpha & \beta
\end{array}\right)
\quad | \cdot (-3)
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 3 \\
0 & -5 & \alpha - 9 & \beta - 6
\end{array}\right)
\quad | \cdot 5
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 3 \\
0 & 0 & \alpha - 4 & \beta + 9
\end{array}\right)
$$

1. $(A|b)$

   erweiterte Koeffizientenmatrix

2. Gauß

   auf Summen achten (Parameter)

3. Fallunterscheidung

   -> 0 | 0

   -> 0 | Zahl

   -> Zahl | egal

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-4 & p+9 \end{array}\right)$$

1. Fall: $\alpha <> 4 \Rightarrow Det(A) = 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{(\alpha-4)}_{<>0} <> 0$

↳ eindeutig lösbar

$\Rightarrow Rg(A) = 3 = Rg(A|b)$

Maximalrang

2. Fall $\alpha = 4 \wedge p <> -9$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 <> 0 \Rightarrow Rg(A) = 2$$

$\neq$ ↯

$$Det(A|b) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & (p+9) \end{vmatrix} = p+9 <> 0$$

$\Rightarrow Rg(A|b) = 3$

3. Fall : $0 = 0$ $\alpha = 4 \wedge \beta = -9$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad Rg(A) = 2 = Rg(A|b)$$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 <> 0 \Rightarrow \text{Maximalrang}$$

$x_3 = \gamma$ $\qquad x_2 + \gamma = 3 \Leftrightarrow x_2 = 3 - \gamma$

$$x_1 + 2\cdot(3-\gamma) + 3\cdot\gamma = 2 \Leftrightarrow x_1 = -4 - \gamma$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 - \gamma \\ 3 - \gamma \\ 0 + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$