AUFGABEN

1) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem und geben die Lösungsmenge als Vektor an.

a) $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -11 \\ -x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & -9 \\ 8x_1 & - & 6x_2 & - & 8x_3 & = & 24 \end{array}\right|$

2) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Matrizengleichung.

a) $\begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(-1; 2; 3)$

$(8; 21; -2; 3)$

2) a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Pivot} \quad I\cdot(-4) \,\big]+ \quad I\,(-5) \,\big]+$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} I\cdot(-7) \\ I\,8 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -56 & 35 & -7 \\ 0 & 56 & -32 & 16 \end{array}\right) \,\big]+$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow (-1;2;3)^T$$

2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \\ + \end{array}$

1. Bildung $(A|b)$
↓
erweiterte Koeffizienten Matrix

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & \alpha-9 & \beta-6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 5 \\ + \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \alpha-4 & \beta+9 \end{array}\right)$

2. Gauß bis zur Stufenstellen

Det = 1 : 1. Fall $\alpha = 4 \wedge \beta = -9$ $\quad Rg(A) = 2 = Rg(A|b)$

2. Fall: $\alpha <> 4 \wedge \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{Det}(A) = \alpha - 4 <> 0 \Rightarrow \mathrm{Rg}(A) = 3 = \mathrm{Rg}(A|b)$$

3 Fall $\alpha = 4 \wedge \beta <> -9$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \beta+9 \end{array}\right)$$

$\mathrm{Rg}(A) = 2$

$\mathrm{Det}(A|b) = \beta + 9 <> 0$

$\neq \Rightarrow \mathrm{Rg}(A|b) = 3$

↯

Fall: 1. $\alpha = 4 \wedge \beta = -9$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad x_3 = \gamma$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3\gamma & 2 \\ 0 & 1 & \gamma & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_2 = 3 - \gamma$$

I.

$$x_1 + 2 \cdot (3 - \gamma) + 3\gamma = 2$$

$$x_1 = -4 - \gamma$$

$$\begin{pmatrix} -4 - \gamma \\ 3 - \gamma \\ 0 + \gamma \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{g:\ \vec{x}}$$