AUFGABEN

1) Berechnen Sie – sofern möglich – den Winkel bzw. den Abstand der Vektoren und geben die Länge der Vektoren an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3X \\ -2 \\ X-1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \\ -2X \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a \\ 7a \\ -2a \end{pmatrix}$

c) Basis ?

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) b)

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ -a \\ 7a \\ -2a \end{pmatrix} = -6a + 0 - 2a + 7a^2 - 8a$$

$$= 7a^2 - 16a = a\underbrace{(7a - 16)}_{} = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \vee \quad a_2 = 16/7$$

c)

$$\left|\begin{array}{l} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 2\beta + 4\gamma = 0 \\ -2\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{array}\right| \quad |\cdot(-3) \quad +, \qquad |\cdot 2 \quad +$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 0 \quad \beta + \gamma = 0 \\ 0 \quad \beta + \gamma = 0 \end{array}\right) \ominus \qquad \begin{array}{r} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ linear abhängig $\Rightarrow$ keine Basis

3) 5)

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}5-4\\-2+3\\4-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix}5\\-2\\4\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}4-5\\-3+2\\2-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\\4\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

4) 5)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}4-3\\-1+2\\3+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\gamma \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}\gamma &= (-1)\\ \gamma &= 1\end{aligned} \qquad \lightning$$

1) 5) $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$

$<>$

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -2\beta \\ 2\alpha & +5\beta \\ 5\alpha & +8\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & +3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \quad |\cdot 2 \quad |\cdot 5 \quad +$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha & -2\beta & = 1 \\ 0 & \beta & = -1 \\ 0 & -2\beta & = -3 \end{pmatrix} \qquad \beta = -1 \qquad \beta = 3/2 \qquad ↯$$

$\Rightarrow$ windschief ✓

2) 5)

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 1 + 2 \\ 3 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 + 1 \\ -2 - 3 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$g_1 = g_2$

$$\begin{aligned} -3p - 4r &= -3 \\ 3p + 5r &= 5 \\ -2p - 3r &= -3 \end{aligned}$$

$r = 2$

$-2p - 6 = -3$

$-2p = 3 \qquad p = -\frac{3}{2}$

$-3\left(-\frac{3}{2}\right) - 4 \cdot 2 = -3$

$4{,}5 - 8 \neq -3$ ↯