AUFGABEN

1) Berechnen Sie – sofern möglich – den Winkel bzw. den Abstand der Vektoren und geben die Länge der Vektoren an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3X \\ -2 \\ X-1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x-2 \\ 1 \\ -2X \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ -a \\ 7a \\ -2a \end{pmatrix}$

c) Basis ?

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left|\begin{array}{cccc} \alpha & -\beta & +\gamma & =0 \\ 0 & \beta & +\gamma & =0 \\ 0 & 5\beta & -3\gamma & =0 \end{array}\right| \quad |\cdot(-5) \;)+$$

$$\left|\begin{array}{cccc} \alpha & -\beta & +\gamma & =0 \\ 0 & \beta & +\gamma & =0 \\ 0 & 0 & -8\gamma & =0 \end{array}\right| \quad \rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

=> Triviallösung

=> linear unabhängig

=> Basis

=> Dimension 3 (, da 3 Stück)

3a) $\vec{x} = \vec{a} + \alpha \cdot \overrightarrow{ab} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 2 - 3 \\ 2 - 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \vec{b} + \beta \cdot \overrightarrow{ba} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 3 - 2 \\ 1 - 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$-$

4a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ -1 - 4 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 + 1 \\ -6 - 4 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad r = 2$, $r = 2$, $r = 2$ ✓

1) a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-2\\8\\-4\end{pmatrix}$; $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$

$\cdot(-2)$

$$\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\-8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}\cdot\beta \qquad ↯ \quad \begin{matrix}\beta = 3\\ \beta = 2\end{matrix}$$

2) a) $g_1 = g_2$: $\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\2\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-15\\5\\3\end{pmatrix}$

↯ $\quad 1:5$

$$\left(\begin{array}{rcll} -10 & = & -5\alpha & -15\beta \\ -6 & = & -3\alpha & +5\beta \\ 2 & = & +\alpha & +3\beta \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{rrcr} -\alpha & -3\beta & = & -2 \\ -3\alpha & +5\beta & = & -6 \\ \alpha & +3\beta & = & 2 \end{array}\right| \quad I\cdot 3 \quad + \quad +$$

$$\begin{array}{rrcr} -\alpha & -3\beta & = & -2 \\ 0 & -\beta & = & -12 \\ 0 & 0 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 34 \\ \beta = 12 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt