$(\mathbb{R};\oplus)$ m.t $x \oplus y = x + y + x \cdot y$

b.i.a.i.: $x \oplus y \rightarrow \mathbb{R}$

$$\underbrace{x+y}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{x\cdot y}_{\in\mathbb{R}} \Big\} \ \mathbb{R}$$

assoziat.: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

$$(x+y+x\cdot y) \oplus z = x \oplus (y + z + y\cdot z)$$

$$x+y+z+x\cdot y+x\cdot z+y\cdot z+xyz = x+y+z+yz+xy+xz + xyz$$

...

$$0 = 0$$

Kommutativ:

$$x \oplus y = y \oplus x$$

$$x + y + x \cdot y = y + x + y \cdot x \quad | -x-y$$

$$xy = yx \quad \checkmark$$

neutral:

$$x \oplus 1 = x$$

$$x + 1 + x \cdot 1 = x \quad | -x$$

$$1(1+x) = 0 \quad | :(1+x) \quad 1 = 0 \in \mathbb{R}$$

$$x \neq -1$$

$$1 = \frac{0}{1+x} = 0$$

2. Fall: $x = -1$: $-1 \oplus 0 = -1$

$$-1 + 0 + 0 \cdot (-1) = -1 \quad \checkmark$$

inverses:

$$x \oplus \bar{x} = \mathbb{1} = 0$$

$$x + \bar{x} + x \cdot \bar{x} = 0 \qquad | -x$$

$$\bar{x}\,(1 + x) = -x \qquad | : (1+x) \quad ; x <> -1$$

$$\bar{x} = -\frac{x}{1+x}$$

$x = -1$:

$$-1 \oplus \bar{x} = 0$$

$$-1 + \bar{x} - \bar{x} = 0$$

$$-1 = 0 \qquad \lightning$$

=> abelscher Monoid

Die Struktur $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \oplus)$ ist abelsche Gruppe.