$$(\{x + \sqrt{42}\cdot y;\ x;y \in \mathbb{Q}\};\ +,\ *)$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &: \tfrac{3}{4} + \sqrt{42}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\ a_2 &: -\tfrac{2}{5} + \sqrt{42}\cdot\tfrac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Sigma : \underbrace{\left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{2}{5}\right)}_{\mathbb{Q}} + \sqrt{42}\cdot\underbrace{\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right)}_{\mathbb{Q}}$$

Sinói : $a_1 + a_2 \rightarrow x + \sqrt{42}\,y$

$$(\underline{x_1} + \underline{\sqrt{42}\,y_1}) + (\underline{x_2} + \underline{\sqrt{42}\,y_2})$$

$$\left.\begin{aligned} &\underbrace{(x_1 + x_2)}_{x_3} + \sqrt{42}\cdot\underbrace{(y_1 + y_2)}_{y_3} \end{aligned}\right\} x_i;\ y_i \in \mathbb{Q}$$

associatività

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$$

$$\left[(x_1 + \sqrt{42}\, y_1) + (x_2 + \sqrt{42}\, y_2)\right] + (x_3 + \sqrt{42}\, y_3)$$

$$\left[(x_1 + x_2) + \sqrt{42}\,(y_1 + y_2)\right] + (x_3 + \sqrt{42}\, y_3)$$

$$(x_1 + x_2 + x_3) + \sqrt{42}\,(y_1 + y_2 + y_3)$$

$$(x_1 + \sqrt{42}\, y_1) + \left[(x_2 + \sqrt{42}\, y_2) + (x_3 + \sqrt{42}\, y_3)\right]$$

$$(x_1 + \sqrt{42}\, y_1) + \left[(x_2 + x_3) + \sqrt{42}\,(y_2 + y_3)\right]$$

$$(x_1 + x_2 + x_3) + \sqrt{42}\,(y_1 + y_2 + y_3)$$

kommutativ: $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$

$$(x_1 + \sqrt{42}\, y_1) + (x_2 + \sqrt{42}\, y_2) = (x_2 + \sqrt{42}\, y_2) + (x_1 + \sqrt{42}\, y_1)$$

$$(x_1 + x_2) + \sqrt{42}\,(y_1 + y_2) = (x_2 + x_1) + \sqrt{42}\,(y_2 + y_1)$$

da Standardaddition

neutral: $a + \mathbb{1} = a$

$$(x + \sqrt{42}\, y) + \underbrace{(x_1 + \sqrt{42}\, y_1)}_{\vartheta} = x + \sqrt{42}\, y$$

$$\mathbb{1} = \vartheta + \sqrt{42} \cdot \vartheta \; ; \; \vartheta \in \mathbb{Q}$$

invers : $a + \overline{a} = 1$

$$(x + \sqrt{42}\,y) + (\overline{x} + \sqrt{42}\,\overline{y}) = 0 + \sqrt{42} \cdot 0$$

$$x + \overline{x} = 0 \qquad \sqrt{42}\,y + \sqrt{42}\,\overline{y} = \sqrt{42} \cdot 0 \;\; / : \sqrt{42}$$

$$y + \overline{y} = 0$$

$$\overline{x} = -x \quad \wedge \quad \overline{y} = -y$$

$$\overline{a} = -x + \sqrt{42} \cdot (-y)$$

=> abelsche Gruppe

$*$: <u>binär</u> : $a_1 * a_2 \to a_3$

$$(x_1 + \sqrt{42}\, y_1) * (x_2 + \sqrt{42}\, y_2)$$

$$x_1 x_2 + \sqrt{42}\, y_1 x_2 + \sqrt{42}\, x_1 y_2 + \underbrace{\sqrt{42} \cdot \sqrt{42}}_{42}\, y_1 \cdot y_2$$

$$\underbrace{(x_1 x_2 + 42 y_1 y_2)}_{x_3} + \sqrt{42}\, \underbrace{(x_1 y_2 + x_2 y_1)}_{y_3}$$

$$x_i ,\ y_i \in \mathbb{Q}$$

assoziativ
kommutativ } JA!

müsste bewiesen werden!

neutral

$$a * \mathbb{1} = a$$

$$(x + \sqrt{42}\, y) \cdot \underbrace{(x_1 + \sqrt{42}\, y_1)}_{1} = (x + \sqrt{42} \cdot y)$$

$$\mathbb{1} = (1 + \sqrt{42} \cdot 0)$$

invers:

$$a * \bar{a} = \mathbb{1}$$

$$(x + \sqrt{42} \cdot y) * (\bar{x} + \sqrt{42}\, \bar{y}) = 1 + \sqrt{42} \cdot 0$$

$$(x \cdot \bar{x} + 42 \cdot y \cdot \bar{y}) + \sqrt{42} \cdot (x\bar{y} + y\bar{x})$$

$$x \cdot \bar{x} + 42\, y\, \bar{y} = 1 \quad \wedge \quad x\bar{y} + y\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = -\frac{y\bar{x}}{x}$$

$$x\bar{x} + 42\,y\bar{y} = 1 \qquad \bar{y} = -\frac{\bar{x}y}{x}$$

$$x\bar{x} + 42y\cdot\left(-\frac{\bar{x}y}{x}\right) = 1$$

$$\frac{x^2\bar{x} - 42y^2\cdot\bar{x}}{x} = \bar{x}\cdot\frac{x^2-42y^2}{x} = 1$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x}{x^2-42y^2}\\ \bar{y} &= -\frac{y}{x^2-42y^2}\end{aligned}\right\} \quad \bar{a} = \frac{x}{x^2-42y^2} - \sqrt{42}\,\frac{y}{x^2-42y^2}$$

$$x;y <> 0$$

Distributivgesetz gilt (wäre zu zeigen)

→ Überprüfung für $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$