1) e^{2x+1} ; $x \in \mathbb{N}$ $\quad 2x+1 \hat{=}$ positive ungerade Zahlen

$\Rightarrow e^{7} : e^{5} = e^{7-5} = e^{2} \rightarrow$ ist nicht ungerade

$\Rightarrow$ Keine Binäre Operation

Annahme Binäre Operation:

assoziativ: $\left(e^{2x+1} : e^{2y+1}\right) : e^{2z+1} \; \cdot \; e^{2x+1} : \left(e^{2y+1} : e^{2z+1}\right)$

$$\left[2x+1 - (2y+1)\right] - (2z+1) = 2x+1 - \left[2y+1 - (2z+1)\right]$$

$$\ldots -2z \ldots = \ldots +2z \ldots$$

2) $(A, *)$; $A = \{1; -1\}$

Cayley-Tabelle:

$*$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$\in A$

↓

binär

$$\left.\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 \\ 1 \cdot (-1) &= -1 \\ (-1) \cdot 1 &= -1 \\ (-1) \cdot (-1) &= 1 \end{aligned}\right\} \in A$$

assoziativ:

$$\left.\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c &= a \cdot (b \cdot c) \\ abc &= abc \end{aligned}\right\} a, b, c \in A$$

$\Rightarrow$ da Standard-Multiplikation

$\rightarrow$ daher auch kommutativ (offensichtl.)

neutral:

$$a \cdot \mathbb{1} = a$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot \mathbb{1} = 1 \\ -1 \cdot \mathbb{1} = -1 \end{array}\right\} \mathbb{1} = 1 \in A$$

invers:

$$a \cdot \bar{a} = \mathbb{1}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1 \cdot \bar{a} = 1 & \rightarrow \bar{a} = 1 = a \\ (-1) \cdot \bar{a} = 1 & \rightarrow \bar{a} = -1 = a \end{array}\right\} \in A$$

$\Rightarrow$ abelsche Gruppe

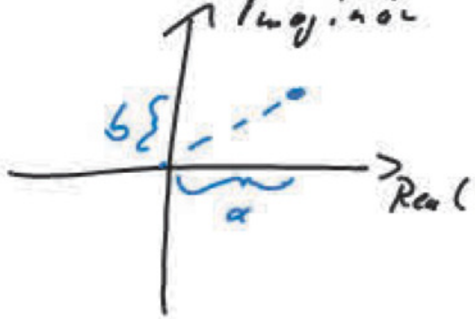
Beweisen Sie bzgl. der komplexen Zahlen und der darin definierten Addition die maximal mögliche Struktur.

$z \in \mathbb{C} : z = a + bi \; ; \; i = \sqrt{-1}$

Kleines I

Semikolon

$a, b \in \mathbb{R}$



$z = \pi + e \cdot i$ ist eine komplexe Zahl

$z = 42 = 42 + 0 \cdot i$

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = 3 + 7i \\ z_2 = -2 - 4i \end{array}\right\} \Sigma \Rightarrow 1 + 3i$$

binär: $\quad z_1 + z_2 = z_3 \qquad z_i \in \mathbb{C}$

1. $$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{a_3} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{b_3} \cdot i$$

$$a_i,\ b_i \in \mathbb{R} \qquad \checkmark$$

2. $$(a + b i) + (c + d i) = \underbrace{(a + c)}_{e} + \underbrace{(b + d)}_{f} \cdot i$$

$$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

assoziativ: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

$$[(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)] + (a_3 + b_3 i)$$

$$[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i] + (a_3 + b_3 i)$$

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) i$$

$$=$$

$$(a_1 + b_1 i) + [(a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)]$$

$$(a_1 + b_1 i) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3) i]$$

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) i$$

Kommutativ: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i)$$

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1) i$$

Standardaddition

neutral: $z + 1 = z$

$$(a + b i) + 1 = a + b i$$

$$1 = 0 = 0 + 0 i \in \mathbb{C}$$

invers: $z + \bar{z} = 1$

$$(a+bi) + (\bar{a} + \bar{b}i) = 0 + 0 \cdot i$$

real: $a + \bar{a} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{a} = -a$

$\in \mathbb{R}$

imaginär: $bi + \bar{b}i = 0\, i \quad \rightarrow \quad \bar{b} = -b$

$$\bar{z} = -a - bi \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ abelsche Gruppe

$(\mathbb{N}, +, *)$

$(\mathbb{N}, +)$: binär, asso, komm, neutral $\Rightarrow$ abel. Monoid

$(\mathbb{N}, *)$: — " — $\Rightarrow$ abel. Monoid

- beidseitig Distributivgesetz:

$$a * (b + c) = a * b + a * c \qquad \text{linksseitig}$$

$$(b + c) * a = b * a + c * a \qquad \text{rechtsseitig}$$

- Nullelement (Dominanz vom neutralen Element der ersten Verknüpfung)

$(\mathbb{Z}, +, *)$

$(\mathbb{Z}, +)$: abelsche Gruppe

$(\mathbb{Z}, *)$: abelsche Monoid

$\Big\}$ abelsch

Distributivgesetz gilt beidseitig

Nullelement: $+ : 1 = 0$

$* : x * 1 = x$ $\Big\}$ ✓

$\Rightarrow$ abelscher, unitärer Ring

abel. Monoid + $\overset{\text{abelsch}}{\downarrow}$ Monoid + Distributiv + Nullelement $\longrightarrow$ $\overset{\text{abelsch}}{\downarrow}$ <u>Halbring</u>

abelsche Gruppe + $\overset{\text{abelsch}}{\downarrow}$ Halbgruppe + Distributiv $\longrightarrow$ $\overset{\text{abelsch}}{\downarrow}$ <u>Ring</u>

abelsche Gruppe + $\overset{\text{abelsch}}{\downarrow}$ Monoid + Distributiv $\longrightarrow$ $\overset{\text{abelsch}}{\downarrow}$ <u>unitärer Ring</u> (Ring mit Einselement)

---

abelsche Gruppe + $\overset{\text{abelsch}}{\downarrow}$ Gruppe + Distributiv $\longrightarrow$ $\overset{\text{abelsch}}{\downarrow}$ Körper