S 13 Nr. 2

$M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \circ y = 1/2 \cdot x \cdot y$

<u>binär</u>:

$$\left.\begin{array}{l} x \circ y \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \mathbb{R} \circ \mathbb{R} \to 1/2 \cdot \mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \setminus \{0\} \circ \setminus \{0\} \not\to \{0\} \end{array}\right\} \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Annahme des Widerspruchs:

$x \circ y \to \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ NEIN, da keine Wurzel

$x \circ y \to \{0\}$ $\Rightarrow$ NEIN, da $x <> 0 \vee y <> 0$

assoziativ:

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

$$\left(\tfrac{1}{2} \cdot x \cdot y\right) \circ z = x \circ \left(\tfrac{1}{2} \cdot y \cdot z\right)$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2} x \cdot y\right) \cdot z = \tfrac{1}{2} \cdot x \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot y \cdot z\right)$$

$$\tfrac{1}{4} \cdot x \cdot y \cdot z = \tfrac{1}{4} \cdot x \cdot y \cdot z \qquad \checkmark$$

kommutativ:

$$x \circ y = y \circ x$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot x \cdot y = \tfrac{1}{2} \cdot y \cdot x \,, \qquad \checkmark$$

da Standardmultiplikation

$\Rightarrow$ bisher abelsche Halbgruppe

neutrales Element

$$x \circ 1 = x$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot x \cdot \boxed{1} = x \qquad | : x \,, \quad x <> 0$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot 1 = 1 \qquad | \cdot 2$$

$$1 = 2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

inverses Element:

$$x \circ \bar{x} = 1 = 2$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot x \cdot \bar{x} = 2 \qquad | \cdot 2$$

$$x \cdot \bar{x} = 4 \qquad | \cdot \tfrac{1}{x} \,, \quad x <> 0$$

$$\bar{x} = \tfrac{4}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$x \circ \bar{x} = 2 \longleftarrow$$

$$\tfrac{1}{2}x \cdot \tfrac{4}{x} = \tfrac{4}{2} = 2$$

=> abelsche Gruppe

1) a) $M = \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

Bind.: $\oplus = \vec{x}_1 \oplus \vec{x}_2 = (x_1 + y_1 \; ; \; x_2 + y_2)$

link $\mathbb{R} + \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

recht $\mathbb{R} + \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\vec{x}_1 \oplus \vec{x}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

assoziativ: $(\vec{x}_1 \oplus \vec{x}_2) \oplus \vec{x}_3 = \vec{x}_1 \oplus (\vec{x}_2 \oplus \vec{x}_3)$

$$(x_1 + y_1 \; ; \; x_2 + y_2) \oplus (x_3 \; ; \; y_3) \quad \Big| \quad (x_1 \; ; \; y_1) \oplus (x_2 + y_2 \; ; \; x_3 + y_3)$$

$$(x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \; ; \; x_3 + y_3) \Leftrightarrow (x_1 + y_1 \; , \; x_2 + y_2 + x_3 + y_3)$$