abelsche

$(\mathbb{N}, \cdot) \quad \rightarrow a \cdot b = b \cdot a$ — Kommutativ

$\rightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ — assoziativ

Halbgruppe

$\rightarrow \mathbb{N} \cdot \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — binäre Operation

Monoid

$\rightarrow a \cdot \underline{1} = a$ — neutrales Element

$\underline{1} = 1 \in \mathbb{N}$

Gruppe

$\rightarrow a \cdot \bar{a} = \underline{1} = 1 \quad |:a$ — inverses Element

$\bar{a} = 1/a \notin \mathbb{N}$

$(\mathbb{Q}, \circ)$: $a \circ b = 2a \cdot b$

Sind.: $\mathbb{Q} \circ \mathbb{Q} = 2 \cdot \mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cdot \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$(a = 0 \quad 0 \circ b = 2 \cdot 0 \cdot b = 0 \in \mathbb{Q})$

assoziativ: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

$(2a \cdot b) \circ c = a \circ (2b \cdot c)$

$2 \cdot (2a \cdot b) \cdot c = 2a \cdot (2b \cdot c)$

$4abc = 4abc$ ✓

$\Rightarrow$ Halbgruppe

Kommutativ:

$$a \circ b = b \circ a$$
$$2a \cdot b = 2b \cdot a$$
$$2ab = 2ab \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ abelsche Halbgruppe

neutral:

$$a \circ \underline{1} = a$$
$$2a \cdot \underline{1} = a$$
$$\underline{1} = 1/2 \in \mathbb{Q}$$

$$a = 0: \quad 0 \circ 1/2 = 2 \cdot 0 \cdot 1/2 = 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ abelsche Monoid

inverses:

$$a \circ \bar{a} = \underline{1} = \tfrac{1}{2}$$

$$2 \cdot a \cdot \bar{a} = \tfrac{1}{2} \quad | :2a \quad \overset{?}{\circ} \quad a <> 0$$

$$\bar{a} = \frac{1}{4a} \in \mathbb{Q} \quad \text{aber} \quad a <> 0 \quad \lightning$$

=> das inverse Element existiert nicht!

Aber. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$

dann gilt $\bar{a} = \frac{1}{4a} \in \mathbb{Q}$

=> abelsche Gruppe

$M = \{ e^x \,;\, x \in \mathbb{Z} \}$, $(M, \sim): x \sim y = e^{2x+y}$

binär: $M \sim M \to M$

$$e^x \sim e^y = e^{2x+y}$$

$$x \sim y = 2x + y = 2 \cdot \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

assoziativ: $(x \sim y) \sim z = x \sim (y \sim z)$

$$(e^{2x+y}) \sim z = x \sim (e^{2y+z})$$

$$e^{2\cdot(2x+y)+z} = e^{2x+(2y+z)}$$

$$e^{4x+2y+z} = e^{2x+2y+z} \quad ↯$$