algebraische Strukturen

=> eine Menge mit mind. einer Operator

$(\mathbb{N}, +)$

1.) Bleibe ich in meiner Welt

$$n_1 + n_2 = n_3 \quad , n_1 ; n_2 ; n_3 \in \mathbb{N}$$

-> binäre Operation

2) assoziativ : $(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3)$

3) Kommutativ : $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$

4) neutrales Element $(\mathbb{1})$ $(\mathbb{N}_0, +)$

$$n_1 + \mathbb{1} = n_1$$

$$\mathbb{1} = 0$$ => auf Wert prüfen $0 \in \mathbb{N}_0$

5) inverse Element $(\bar{a})$

$$n_1 + \overline{n_1} = \mathbb{1}$$

$$n_1 + (-n_1) = 0$$ => auf Wert prüfen $-n_1 \in \mathbb{N}$

$(\mathbb{Z}, +)$ => abelsche Gruppe

$$(2^x, \cdot) \quad ; \quad x \in \mathbb{Z}$$

binär:

$$\left.\begin{aligned} 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} &= 2^{x_3} \\ 2^{x_1 + x_2} &= 2^{x_3} \\ x_1 + x_2 &= x_3 \end{aligned}\right\} \quad x_1 ; x_2 ; x_3 \in \mathbb{Z}$$

assoziativ:

$$(2^{x_1} \cdot 2^{x_2}) \cdot 2^{x_3} = 2^{x_1} \cdot (2^{x_2} \cdot 2^{x_3})$$

$$2^{(x_1 + x_2) + x_3} = 2^{x_1 + (x_2 + x_3)}$$

$\Rightarrow$ Standard-Addition

kommutativ:

$$2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2} = 2^{x_2 + x_1} = 2^{x_2} \cdot 2^{x_1}$$

bis hier: abelsche Halbgruppe

neutral:

$$2^x \cdot 1 = 2^x$$

$$2^x \cdot 2^y = 2^{x+y} = 2^{x+0} = 2^x$$

$$1 = 2^0 \in M, \text{ da } 0 \in \mathbb{Z}$$

invers:

$$2^x \cdot 2^{\bar{x}} = 1 = 2^0$$

$$2^{x+\bar{x}} = 2^{x+(-x)} = 2^0$$

$$\bar{a} = 2^{-x} \in M, \text{ da } -x \in \mathbb{Z}$$

=> abelsche Gruppe