

Das Mathe- Viertelfinale



1) Handelt es sich bei der folgenden Struktur um eine Gruppe?
 $(4\mathbb{Z}^{n+\beta}, *)$; $n \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{N}$

2) Stellen Sie fest, ob die 3 Vektoren linear abhängig bzw. unabhängig sind mittels.

$$a = (2 \ 1 \ 5)^T, b = (1 \ 4 \ 1)^T, c = (-2 \ 4 \ 1)^T$$

a) der Linearkombination

b) der Determinanten

3) Wie muss der Parameter α gewählt werden, damit die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Berechnen Sie in diesem Fall auch den Flächeninhalt des entstehenden Rechtecks.

$$a = (1 \ -1 \ 2)^T, b = (\alpha \ -2 \ -4)^T$$

4) Welchen Abstand besitzt der Punkt (1,3,6) von

a) dem Punkt (2,5,4)

b) der Geraden mit $g : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) der Ebene $e = 2x - y - 4z = -2$

5) Gegeben sei die Ebene $e_1 = 2x - 3y - z = 5$ und eine 2. Ebene durch die drei Punkte $b_1 = (2, -1, 0)^T, b_2 = (-1, 0, 1)^T, b_3 = (-3, 1, 2)^T$.

a) Berechnen sie die parameterfreie Darstellung der Ebene.

b) Welche 3 Winkel besitzt die Schnittgerade mit den Achsen?

6) Bestimmen Sie von den gegebenen Matrizen die Determinante.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 9 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7) Wie muss der Parameter α gewählt werden, damit die inverse Matrix existiert. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} für $\alpha = -7$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2\alpha \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

8) Berechnen Sie das Ergebnis der gegebenen Gleichung.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

9) Bestimmen Sie zu der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ die zugehörigen Eigenwerte.

10) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

a) Ist invertierbar? Begründen Sie Ihre Aussage!

b) Wenn ja, bestimme man die inverse Matrix mittels der Adjunkten

c) Lösen Sie die Gleichung $A \cdot x = b$ mittels Cramer-Verfahren.

11) Bestimmen Sie von dem gegebenen Gleichungssystem die Lösung mittels Gauß-Verfahren.

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 12 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -15 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 16 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 17 \end{pmatrix}$$

12) Ermitteln Sie mittels Ranguntersuchung ob das Gleichungssystem eine Lösung hat und geben diese in der parameterfreien als auch Parameterform an.

$$\begin{aligned} a + 2b + c + 7d + 2e &= 2 \\ 2a + 5b - 2c + 3d &= 2 \\ &+ c + 2d + e = 5 \end{aligned}$$

13) Mit Hilfe von Ranguntersuchungen ist zu entscheiden, für welche Parameterwerte $c \in \mathbb{R}$ das gegebene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 9x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + c \cdot x_3 &= 1 \end{aligned}$$

- a) (i) genau eine Lösung,
 (ii) unendlich viele Lösungen oder
 (iii) keine Lösung besitzt.

b) Im Fall (i) und (ii) geben Sie die Lösung in der Vektorschreibweise an.

14) Geben Sie für die folgenden Untersuchungen mögliche statistische Einheiten und Masse an und bestimmen die notwendigen Identifikationskriterien.

Geben Sie ferner die zugrundeliegende Skala sowie deren Transformationsmöglichkeiten an.

- a) Handwerkeranteil in Deutschland
 b) Alter von Tieren im Zoo
 c) Benzinverbrauch eines PKWs

15) Gegeben sind die folgenden Beobachtungswerte eines diskreten Merkmals:

5 3 1 3 3 2 1 5 4 1 5 4 2 4 2 1 4 5 1 2

- a) Berechnen Sie die absolute als auch relative Häufigkeiten
 b) Bestimmen Sie die relativen Summenhäufigkeiten und stellen diese grafisch dar.
 c) Geben Sie den Mittel- sowie den Zentralwert an.

16) Bei der Bundestagswahl 2002 in Deutschland ergab sich folgende Sitzverteilung für den Bundestag.

Partei	SPD	CDU	CSU	Grüne	FDP	PDS
Sitze	251	190	58	55	47	2

- a) Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten und skizzieren ein Kreisdiagramm (Winkelangabe)
- b) Zeichnen Sie ein geeignetes Diagramm bzgl. der absoluten Häufigkeiten.

17) Beim Elfmeterschießen hatten 11 Teilnehmer jeweils 10 Versuche und erzielten folgende Treffer:

4	6	3	1	2	8	4	5	2	0	2
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- a) Bestimmen Sie den Modus und die Quartile und geben den Mittelwert (4 Nachkommastellen) an.
- b) Berechnen Sie die mittlere absolute Abweichung und den Variationskoeffizient.

18) Ein Glücksrad ist in 12 gleiche Sektoren unterteilt, die von 1 bis 12 nummeriert sind. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten Sie

- a) eine ungerade Zahl,
- b) eine Primzahl,
- c) eine durch 3 teilbare Zahl?

19) Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Mädchens liegt bei 52%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit 7 Kindern

- a) genau 4 Jungen
- b) höchstens 4 Jungen?

20) Bei der Produktion von CD-Rohlingen wird mit einem Ausschuss von 5% gerechnet. Sollten bei einer Stichprobe aus 100 Rohlingen mehr als 7 Stück Fehler aufweisen, so darf die Lieferung abgelehnt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür?

21) Ein Kaufmann verspricht für die Einräumung eines Wegerechtes nach Ablauf von 5 Jahren einen Betrag von 10.000 Euro zu zahlen. Welchen Barwert hat diese zukünftige Zahlung heute bei 8 %

- a) Bei einfacher Verzinsung
- b) Bei Zinseszinsrechnung

22) Der Kontostand am 01.01.2008 betrug 4.200 Euro. Im Laufe des Jahres wurden folgende Buchungen vorgenommen. Wie hoch ist nach der englischen Methode der Kontostand am 01.01.2009

22.02.2008	Einzahlung	3.500	
14.04.2008	Auszahlung	2.100	
07.07.2008	Auszahlung	1.900	
15.09.2008	Einzahlung	2.700	p = 4%

- 23) Ein Kapital von 12.000 Euro werden von 2002 bis 2010 mittel Zinseszins (5%) angelegt.
- a) Wie groß ist das Endkapital bei jährlicher Verzinsung?
 - b) Wie groß ist das Endkapital bei vierteljährlicher Verzinsung?
- 24) Ein Kapital von 8.500 Euro wurde am 14.06.2005 (deutsche Methode, Variante „morgen“) mit 6% angelegt. An welchem Datum im Jahr 2011 beträgt der Kontostand Euro 13.460,16 Euro?
- 25) Eine Maschine (Neuwert = 120.000 Euro) soll nach 7 Jahren noch einen Restwert von 2.000 Euro haben. Erstellen Sie den Abschreibungsplan, wobei die ersten 4 Jahre mit 12% und die restlichen linear abgeschrieben werden sollen
- 26) Ein Objekt mit einem Anschaffungspreis von 250.000 Euro soll in 15 Jahren abgeschrieben werden.
- a) Wie groß ist der Abschreibungssatz ohne nicht abzuschreibenden Betrag?
 - b) Wie groß ist der Abschreibungssatz mit einem nicht abzuschreibenden Betrag von 150.000 Euro?
- 27) Peter zahlt ab 01.01.2011 jährlich 1.200 Euro auf ein Konto, das mit einem Satz von 3% nachschüssig verzinst wird.
- a) Nach welcher Zeit beträgt sein Kapital mehr als 32.000 Euro?
 - b) Welchen Betrag hätte Peter am 01.01.2011 einmalig anlegen müssen?
- 28) Ein Sparer schließt einen Ratensparvertrag ab, bei dem er in den ersten 6 Jahren monatlich vorschüssig 120 Euro einzahlt, wobei ihm die Bank 4% Zinsen gibt. Die nächsten 4 Jahre wird das Kapital zu 5% weiterverzinst.
- a) Bestimmen Sie den Betrag der Ersatzrente für die ersten 6 Jahre
 - b) Auf welchen Endbetrag ist das Kapital nach 10 Jahren angewachsen?
- 29) Ein Kredit in Höhe von 125.000 Euro soll nach 15 Jahren durch vorschüssige 2-monatliche Zahlungen getilgt werden, wobei ein Zinssatz von 7% zugrunde liegt.
- a) Bestimmen Sie die jährliche sowie unterjährige Annuität.
 - b) Erstellen Sie den Abschreibungsplan im ersten Jahr.

Das Mathe-Halbfinale



30) Gegeben ist die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2\}$ und die beiden wie folgt definierten Operatoren $x \cdot y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ und $x \cdot y = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$. Ist (M, \cdot, \cdot) ein Ring oder Körper?

31) Begründen Sie, dass die Vektoren eine Basis sind und den \mathbb{C}^4 aufspannen.

$$a = \begin{pmatrix} i \\ i+1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1+i \\ -i \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} -1 \\ -i-1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

32) Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass das Vektorsystem (v_1, v_2, v_3) bestehend aus $v_1 = (1, \alpha, -1)^T$, $v_2 = (2, 1, 0)^T$, $v_3 = (-3, -\beta, 1)^T$

im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^3 linear unabhängig ist.

Bildet das Vektorsystem in diesem Fall eine Basis des \mathbb{R}^3 (Begründung)?

33) Gegeben seien folgende Geraden. Ermitteln Sie die deren Lage und den Schnittpunkt mit Schnittwinkel oder den Abstand von f und g .

a) $f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

b) $f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $g = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

c) Die Geraden durch die Punkte A und B:

$$A_1 = (6 \ 2 \ 8)^T, B_1 = (3 \ -1 \ -4)^T \text{ und } A_2 = (5 \ 4 \ 6)^T, B_2 = (5 \ -2 \ 2)^T$$

34) Bestimmen Sie die Parametergleichung der Geraden im \mathbb{R}^3 durch die Punkte $P_1 = (1, -2, 2)$ und $P_2 = (3, -2, 1)$. Liegt der Punkt $Q = (7, 0, -1)$ auf der Geraden?

Wenn nicht, so bestimmen Sie seinen Abstand von der Geraden.

35) Bestimmen Sie von den gegebenen Matrizen die Determinante.

$$\text{a) } A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 & 10 \\ 4 & -7 & 9 & 1 \\ 1 & -6 & -4 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{6} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

36) Gegeben sind folgende Matrizen. Berechnen Sie die fehlenden Werte, so dass $C=A*B$ gilt.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ -3 & 2 & 1 & \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{pmatrix}$$

37) Bestimmen Sie den Wert der Determinanten mittels Gauß-Verfahren (Interpretation).

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -10 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

38) Geben Sie zu der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ und der Eigenwert $\lambda = -1$.

- a) Berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor und dessen Länge
- b) Bestimmen Sie die übrigen zwei Eigenwerte.

39) Bestimmen Sie von dem gegebenen Gleichungssystem die Lösung mittels Gauß-Verfahren und beschreiben Sie die Lösung als Vektorensystem

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -5 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \end{pmatrix}$$

40) Lösen Sie das gegebene Gleichungssysteme auf 2 Arten Ihrer Wahl.

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 3z &= 1 \\ x - 2y + 4z &= 3 \\ 3x - y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

41) Ermitteln Sie mittels Ranguntersuchung ob das Gleichungssystem lösbar ist und geben diese in der Parameterform an (Interpretation).

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 &= 5 \end{aligned}$$

42) Mit Hilfe von Ranguntersuchungen ist zu entscheiden, für welche Parameterwerte $c \in \mathbb{R}$ das gegebene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= c \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

- a) (i) genau eine Lösung,
 (ii) unendlich viele Lösungen oder
 (iii) keine Lösung besitzt.
- b) Im Fall (i) und (ii) geben Sie die Lösung in der Vektorschreibweise an.

43) Klassifizieren Sie die folgenden Merkmale die anhand von Bestands- und Bewegungsmasse, begründen Sie Ihre Annahme und geben die korrespondierende Masse an. Geben Sie ferner die zugrundeliegende Skala sowie deren Transformationsmöglichkeiten an.

- a) Verkehrssünder in Fulda im Mai 2011
- b) Richtige Antworten in der Statistik-Klausur 2011.
- c) Anzahl der in Statistik eingeschriebenen Studenten(innen)

44) Bei einem Eignungstest konnten maximal 14 Punkte erreicht werden. Insgesamt nahmen 100 Personen an diesem Eignungstest teil, wodurch sich folgende Tabelle ergibt:

Punkte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Personen	1	3	5	7	3	5	13	5	8	16	7	6	11	8	2

- a) Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten
- b) Bestimmen Sie die relativen Summenhäufigkeiten.
- c) Stellen Sie die absoluten Häufigkeiten in einem Histogramm dar.
- d) Bestimmen Sie den Durchschnittswert und geben den Median an.

45) In der Tabelle werden die Etappenzeiten einer Radrundfahrt festgehalten

Etappe (km)	0	100	150	220	300	500
Zeiten (min)	0	90	45	30	50	120

- a) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit.
- b) Begründen Sie das Verfahren, das Sie angewandt haben.

46) Für seine Fahrtzeit vom Wohnort zur Arbeitsstelle benötigt Egon folgende Zeiten (in Minuten):

45	40	60	44	42	51	48	45	57	43	47	52	49	43	45	48	59	41	47	52
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- a) Bestimmen Sie den Median, den Mittelwert und das 20%-Quantil.
- b) Wie groß ist die Spannweite und die Varianz seiner Zeiten.

45) Auf dem Hof einer Lackiererei haben 8% der KFZ Läufer (Fall A) und unabhängig davon 10% der KFZ Farbfehler (Fall B). Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt ein Dieb im Dunkeln ein KFZ

- a) mit beiden Fehlern
- b) mit mindestens einem Fehler
- c) nur einem der Fehler?

46) In einem „Nachrichtenkanal“ wird ein Zeichen mit der Wahrscheinlichkeit von 90% richtig übertragen. Eine Nachricht besteht aus 8 Zeichen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

- a) sind alle Zeichen richtig,
- b) werden höchstens zwei Zeichen falsch übertragen?

- 47) Aus einem Lostopf werden 50 Lose gezogen. Laut Angabe des Verkäufers ist bei jedem 6. Los ein Gewinn enthalten.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit 8 Gewinne zu ziehen?
 - Wie viele Gewinne müssen Sie mindestens haben, um mit einer Wahrscheinlichkeit von unter 50% einen Treffer zu landen?
- 48) Im Herbst 2015 haben sich einer Studie zur Folge 60% gegen Grippe impfen lassen. Personen, die geimpft wurden, erkrankten mit einer Wahrscheinlichkeit von 10%, während bei den nicht geimpften 70% an der Krankheit leiden.
- Erstellen Sie das zugehörige Baumdiagramm
 - Zeichnen Sie die Vierfeldertafel
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie einen geimpften Menschen treffen, der erkrankt ist
- 49) Susi hat 10.000 Euro geerbt und legt das Geld zu 8% (jährliche Verzinsung) auf ein Sparbuch an. Nach welcher Zeit beträgt ihr Guthaben mehr als 25.000 Euro
- Bei einfacher Verzinsung
 - Bei Zinseszinsrechnung
- 50) Am 1. März wird ein Konto mit 250 Euro eröffnet, am 10.03. werden 120 abgehoben und am 17.03. fließen wieder 20 Euro Guthaben auf das Konto. Welcher Kontostand bei 5% Zinsen ist am 01. April auf dem Konto zu verzeichnen bei:
- Mittels englischer Methode
 - Mittels deutscher Methode
 - Mittels französischer Methode
- 51) Ein Kapital wird zu 7% angelegt und bringt nach einem halben Jahr 420 Euro Zinsen.
- Wie groß ist der angelegt Betrag?
 - Wie hoch wären die Zinsen bei einer monatlichen Verzinsung in diesem halben Jahr?
- 52) Welches Kapital muss am 30.09.1970 (deutsche Methode, Variante „morgen“) mit 8% Zinsen angelegt werden, damit am 01. Mai 1978 ein Kontostand von 26.920,75 Euro vorhanden ist?
- 53) Ein schöner Computer kostete 20.000 Euro und soll geometrisch degressiv mit 10% auf einen Restwert von unter 500 Euro abgeschrieben werden.
- In wie vielen Jahren ist der PC abgeschrieben?
 - Wie hoch wären die jährlichen Abschreibungen bei linearer Abschreibung?

- 54) Eine Büroausstattung hat nach 10 Jahren noch einen Buchwert von 15.000 Euro, wobei mit 20% geometrisch abgeschrieben wurde.
- Wie teuer war die Ausstattung vor 10 Jahren?
 - Wie lange hätte die Abschreibung bei 10% gedauert?
- 55) Einem Selbstständigen werden an seinem 65. Geburtstag von seiner Lebensversicherung 125.000 Euro ausgezahlt. Er legt diesen Betrag zu 8,5% Zinsen bei einer Bank an. Von dem Kapital und den darauf entfallenden Zinsen möchte er 20 Jahre lang eine jährliche vorschüssige Rentenzahlung erhalten. Wie hoch ist diese pro Jahr?
- 56) Auf ein Rentenkonto wird vierteljährlich (vorschüssig) ein Betrag von 250 Euro für eine Dauer von 10 Jahren eingezahlt und mit 7% verzinst.
- Wie hoch ist der Endwert nach 20 Jahren?
 - Wie hoch ist der zugehörige Rentenbarwert?
- 57) Für einen Hauskauf benötigt Familie TraLaLa einen Kredit in Höhe von 300.000 Euro. Die Tilgung erfolgt zum einen via einem Nominalzins von 6% und es sollen jährlich 12% getilgt werden.
- Wie lange muss Familie TraLaLa den Kredit zurückzahlen?
 - Erstellen Sie den Tilgungsplan für die ersten 5 Jahre.
 - Wie groß ist die Restschuld am Ende der Laufzeit?

Das Mathe-Finale



58) Basierend auf $X = \{(a,b) \in Z^3 \times Z^3\}$ ist die Struktur (X, \sim) auf Körpereigenschaft zu prüfen, wobei $a \sim b = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3)$ gilt.

59) Gegeben ist die Menge $M = \{(x, y) \in Z \times Z \mid x + y \cdot \cos(y \cdot \pi)\}$ und $(M, +, *)$
Geben Sie die maximal mögliche Struktur an und beweisen diese.

60) Zeigen Sie auf 2 Arten, dass die Vektoren eine Basis des Vektorraums R^3 bilden !

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie den Vektor $v = (0, 0, 2)^T$ als Linearkombination dieser Basis dar !

61) Von den Vektoren $a = (2, 5, 3)^T$ und $b = (4, -2, 2)^T$ sind zu bestimmen

- der Betrag und die Winkel mit den Koordinatenachsen,
- der Winkel α zwischen den Vektoren,
- ein Vektor n , der auf a und b senkrecht steht und

62) Bestimmen Sie die parameterfreie Gleichung $ax + by + cz = d$ der Ebene E , die die Gerade g_1 enthält und parallel zur Geraden g_2 verläuft!

$$g_1 : P = (0, 1, 3)^T + t(2, 5, 1)^T, t \in R$$

g_2 : durch die Punkte $P_1(3,-1,0)$ und $P_2(4,0,1)$

Welchen Abstand hat der Punkt $P(1,-1,2)$ von g_2 ?

63) Welche Winkel γ bilden die Schnittgerade der Ebenen mit der X-Achse?

$$E_1 : 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \text{ und } E_2 : 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$$

64) Bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$ für die folgende Determinatengleichungen gültig sind..

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -15$$

65) Zeigen Sie, dass der folgende Zusammenhang für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gültig ist.

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} & 1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 1 \\ \frac{2}{x_1} & \frac{2}{y_1} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

66) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist das folgende Gleichungssystem lösbar. Geben Sie die Lösungsmenge in der Form $z = a + bi$ an

$$\begin{vmatrix} z & -1 & z & 0 \\ 1 & z & 0 & -z \\ -z & 0 & z & 1 \\ 0 & z & -1 & z \end{vmatrix} = -3$$

67) Berechnen Sie zu der Matrix alle Eigenwerte und Eigenvektoren.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

68) Bestimmen Sie von dem gegebenen Gleichungssystem die Lösung mittels Gauß-Verfahren und beschreiben Sie die Lösung als Vektorensystem

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 6 \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = -5 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \end{pmatrix}$$

69) Lösen Sie die gegebene Gleichungssysteme. Wenden Sie jeweils ein anderes Verfahren an.

$$\begin{array}{l} x + 2z = 1 \\ \text{a) } 2x + y + 3z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + z = 1 \\ \text{b) } 4x + y + 7z = 5 \\ 6x + 3z = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - y + 2z = 3 \\ \text{c) } 2x - y + z = 0 \end{array}$$

70) Ermitteln Sie mittels Ranguntersuchung ob das Gleichungssystem lösbar ist und bestimmen Sie die Lösungsmenge (Interpretation).

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & - x_4 & = 5 \\ & + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 & = 3 \\ x_1 - 5x_2 & - x_3 + 3x_4 & = 2 \\ 2x_1 & - x_4 & = 1 \end{array}$$

71) Für welche reellen Zahlen $c \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem lösbar?

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 + 18x_3 = 14 \\ -3x_1 - 6x_2 - 9x_3 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 + (c - 6)x_3 = 14 \end{array}$$

Führen Sie dazu Ranguntersuchungen durch!

Geben Sie, falls möglich, die allgemeine Lösung in Vektorschreibweise an

72) Beschreiben Sie, ob es sich bei den genannten Merkmalen um Bestands- oder Bewegungsmasse handelt. Geben Sie zusätzlich die Identifikationskriterien an und definieren die möglichen Skalen.

- a) Sozialversicherungsnummern der Einwohner von Fulda
- b) Anzahl der Kunden einer Bank innerhalb eines definierten Zeitfensters.
- c) Körpertemperatur der Studenten während der Statistik-Klausur.

73) 50 Jugendliche wurde befragt, wie oft sie in der vergangenen Woche ihren Eltern im Haushalt geholfen haben.

0 1 0 5 4 3 1 7 9 3 2 1 0 4 2 6 7 5 0 1 4 1 1 3 4
8 6 2 6 1 0 0 1 4 3 1 2 6 3 5 4 7 4 2 3 1 1 5 6 3

- a) Berechnen Sie die absolute als auch relative Häufigkeiten
- b) Bestimmen Sie die relativen Resthäufigkeiten und stellen diese grafisch dar.
- c) Geben Sie den Mittelwert sowie den Modus an.

74) In der Tabelle werden die Jahresleistungen der deutschen Siebenkämpferin Sabine Braun in den Jahren 1987 bis 1992 dargestellt.

Jahr	1987	1988	1989	1990	1991	1992
Punkte	5621	6432	6575	6688	6672	6985

- a) Berechnen Sie die jährlichen Wachstumsraten und geben den zugehörigen Wachstumsfaktor an.
- b) Bestimmen Sie einen geeigneten Mittelwert und begründen Ihre Entscheidung.

75) Für seine Fahrtzeit vom Wohnort zur Arbeitsstelle benötigt Egon folgende Zeiten (in Minuten):

45	40	60	44	42	51	48	45	57	43	47	52	49	43	45	48	59	41	47	52
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- a) Bestimmen Sie den Median, den Mittelwert und das 20%-Quantil.
- b) Wie groß ist die Spannweite und die Varianz seiner Zeiten.

73) In einer Lieferung von 23 Schulbüchern sind 5 Bücher beschädigt. Jeder Schüler der Klasse erhält ein Exemplar. Das Austeilen beginnt bei Ihnen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) Sie und der nächste Mitschüler ein beschädigtes Buch erhalten
- b) Sie und einer der nächsten beiden Mitschüler (nicht beide) ein beschädigtes Buch erhalten
- c) nicht Sie aber die nächsten beiden Mitschüler ein beschädigtes Buch erhalten?

74) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bienenvolk einen harten Winter überlebt, ist 40%. Ein Imker besitzt 6 Völker. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) vier Völker überleben,
- b) mindestens 2 einen harten Winter überleben?

- 76) Eine statistische Untersuchung vom Sportverhalten von Studierenden hat ergeben, dass 60% das Hochschulsportprogramm nutzen.
Diese bestehen die Mathematik Klausur mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%, während die „unsportlichen“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% nicht bestehen.
- a) Zeichnen Sie das Baumdiagramm und die dazugehörige Vierfeldertafel.
b) Sie treffen jemanden, der die Klausur bestanden hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieser nicht sportlich?
- 77) Es werden 420.000 Euro auf einem Konto angelegt und für 5 Jahre fest angelegt. Nach dieser Zeit werden 169.071,73 Euro gut geschrieben. Wie hoch ist der Prozentsatz
- a) Bei einfacher Verzinsung
b) Bei Zinseszinsrechnung
- 78) Zu Beginn eines Jahres 2000 sind auf einem Konto 25.000 Euro vorhanden. Am 20.04.2000 werden 4.500 Euro eingezahlt und am 15.12.2000 werden 2.000 Euro ausgezahlt. Die Verzinsung erfolgt mittels deutscher Methode zu 4%.
Anschließend bleibt das angesparte Geld weitere 5 Jahre fest zu einem Zinssatz von 6% auf der Bank liegen. Am 01.06.2006 soll das Konto aufgelöst werden.
- a) Wie hoch ist der Kontostand
b) Wie hoch wäre der Kontostand bei englischer Methodik
- 79) Ein Kapital von 5.000 Euro erwirtschaftet nach einem viertel Jahr 150 Euro Zinsen.
- a) Wie hoch ist der gewählte Zinssatz (lineare Verzinsung)?
b) Wie hoch wäre der Zinssatz bei einer monatlichen Verzinsung?
- 80) Es werden 100.000 Euro zu einem unterjährigen Prozentsatz von 5% am 12.09.2001 mittels (französischer Methode, Variante „gestern“) angelegt.
Wie hoch ist der Kontostand am 12. Juni 2010, wenn bei ganzjähriger Verzinsung von der Bank zusätzlich 1% Bonus gezahlt wird?
- 81) Eine Abfüllanlage wird zu einem Preis von 100.000 Euro angeschafft und in den ersten 5 Jahren linear auf einen Restwert von 40.000 Euro abgeschrieben werden. Anschließend mittels degressiver Abschreibung innerhalb von 3 Jahren auf 5.000 reduziert werden.
- a) Wie hoch ist der Abschreibungsprozentsatz in den letzten 3 Jahren?
b) Erstellen Sie den Abschreibungsplan?
- 82) In wie vielen Jahren ist ein Objekt mit einem Anschaffungspreis von 500.000 Euro und einem Abschreibungsprozentsatz von 12% auf unter 7.000 Euro abgeschrieben.
Erstellen Sie den Tilgungsplan für die ersten 5 Jahre.

- 83) Ein Sparer will nachschüssig genau 4.147,68 Euro anlegen. Die Einzahlungen werden mit 6% verzinst. Wie viele Jahre wird es dauern, bis er auf seinem Konto einschließlich Zinsen 1.000.000 Euro hat?
- 84) Nach 10 Jahren werden auf einem Konto ein Rentenendwert von 132.073,29 gutgeschrieben. Der Zinssatz beträgt 4%.
- a) Wie hoch ist die jährliche Rentenrate?
 - b) Wie hoch ist der zugehörige Rentenbarwert?
- 85) Für eine Wohnung wird ein Darlehen in 20 Jahren zu einem Zinssatz von 3% und einer jährlichen Annuität von 16.803,93 zurückgezahlt.
- a) Wie groß ist das geliehene Darlehen?
 - b) Bestimmen Sie die Abschlusszahlung?
 - c) Wie groß wäre eine monatliche (vorschüssige) Annuität und der konforme Jahreszins?

ZUSATZ

86) Für welche Parameterwerte p und q hat das Gleichungssystem ein, keine und unendlich viele Lösungen?

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +px_2 & +2x_3 & = & -q \end{array}$$

87) Untersuchen Sie, ob die Punkte $A(1,2,4)$, $B(2,-1,3)$ und $C(6,3,-5)$ des E^3 auf einer Geraden liegen. Sofern C nicht auf der Gerade liegen sollte, bestimmen Sie den Abstand zur Geraden AB .

88) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

- Ist invertierbar? Begründen Sie Ihre Aussage!
- Wenn ja, bestimme man die inverse Matrix mittels der Adjunkten
- Lösen Sie die Gleichung $A \cdot x = b$ mittels Cramer-Verfahren.

89) Eine ideale Münze wird zehnmal geworfen.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 3 mal „Kopf“ zu werfen?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens 3 mal „Kopf“ zu werfen?
- Wie viele Male wird „Kopf“ im Mittel zu erwarten sein, wenn man zehnmal wirft?

90) Ist die Struktur $(A, *)$ mit der Menge $A := \{1, -1\}$ und der üblichen Multiplikation $*: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ganzer Zahlen eine Halbgruppe oder Gruppe?