VORKURS

03.03.2015

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Welche Junktoren gibt es und was machen sie?
- ✓ Wie sind die Zahlenmengen der Arithmetik definiert?
- ✓ Was verstehen wir unter der Inklusion und wie funktioniert sie?
- ✓ Welche 4 wichtigen Eigenschaften besitzt die Teilmenge?
- ✓ Was gibt es für verschiedene Symmetrien?
- ✓ Welche Gesetze gibt es in der Mengenlehre und Arithmetik?
- ✓ Was wird beim Komplement untersucht?
- ✓ Wofür braucht man das „de Morgan – Gesetz"?

AUFGABEN

Beweisen Sie die folgenden Ausdrücke unter Benennung aller angewandten Gesetze

1) Das Absorptionsgesetz $A \cap (A \cup B) = A$

2) Das De Morgangesetz $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ mittels Komplement

3) Vereinfachen Sie die Robbinsgleichung: $\overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup \overline{B}}}$

1. <u>Mengenlehre (12 Punkte):</u>

Gegeben sind die Menge A mit $A = \{8;10;12;14;16;20;22;26;28;30\}$ und die Menge B der natürlichen Zahlen (größer 2 und kleiner gleich 30), die durch 2 und gleichzeitig durch 3 teilbar sind.
Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

KLASSENEINTEILUNG / ZERLEGUNG

Man spricht von einer Klasseneinteilung, sofern sicher gestellt werden kann, dass jedem Objekt aus der definierten Welt einer Klasse (Untermenge) zugeordnet werden kann.

<u>UND-Verknüpfung:</u>
Die UND-Verbindung zwischen jeder Klasse muss jeweils die leer Menge als Lösung haben. Man spricht dann von disjunkten Mengen.

<u>ODER-Verknüpfung:</u>
Die ODER-Verbindung zwischen allen Klassen muss zu einer Menge führen, die alle Objekte der definierten Ausgangsmenge enthält.

<u>Beispiel:</u>	*Alphabet*
UND-Verknüpfung:	$Konsonat \cap Vokal = \{\ \}$
ODER-Verknüpfung:	$Konsonat \cup Vokal = Alphabet$

POTENZMENGE

Eine Potenzmenge ist eine Ansammlung von allen möglichen Teilmenge basierend auf einer beliebigen Menge A.

Da jedes Objekt der Ausgangsmenge zwei Möglichkeiten besitzt, nämlich zu der Teilmenge zu gehören oder nicht, besteht jede Potenzmenge aus 2^n Untermengen.

Die Teilmengen existieren von der Länge Null (leere Menge) bis zu der Länge *n* (Anzahl der Objekte in der Ausgangsmenge).

<u>Beispiel:</u> $A = \{a; b; c; d\}$

$$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \{\ \}; \\ \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \\ \{a;b\}; \{a;c\}; \{a;d\}; \{b;c\}; \{b;d\}; \{c;d\}; \\ \{a;b;c\}; \{a;b;d\}; \{a;c;d\}; \{b;c;d\}; \\ \{a;b;c;d\} \end{array} \right\} \quad 2^n = 2^4 = 16 \quad \text{Untermengen}$$

KARTESISCHES PRODUKT

Das kartesische Produkt wird mittels Kreuzprodukt aus beliebigen Mengen gebildet, wobei jedes Objekt der linken Menge mit jedem weitern Objekt übrigen Mengen kombiniert wird.

Als Ergebnis entsteht ein n-dimensionales Tupel $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Die entstehende geordnete Punktmenge ist **nicht kommutativ**.

Der Euklidische Vektorraum lässt sich als kartesische Produkt somit wie folgt darstellen: $\Re^3 = \Re x \Re x \Re = (x_1, x_2, x_3)$

<u>Beispiel:</u> $A = \{a; b; c\}$ $\quad B = \{1; 2;\}$

$$AxB = \{(a,1); (a,2); (b,1); (b,2); (c,1); (c,2);\}$$

$$BxA = \{(1,a); (1,b); (1,c); (2,a); (2,b); (2,c);\}$$

AUFGABEN

1) Gegeben sei die Menge $A = \{42; \{x; y\}, \{\ \}\}$.
   Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

   $a) x \in A$ $\quad b) \{x; y\} \subset A$ $\quad c) \{42\} \subset A$ $\quad d) \{42\} \in A$ $\quad e) 42 \in A$

   $f) 42 \subset A$ $\quad g) \{\ \} \in A$ $\quad h) \{\ \} \subset A$ $\quad i) \{\{\ \}\} \subset A$ $\quad j) \{4\} \subset A$

2) Welche der folgenden Aussagen über eine Potenzmenge $P(A)$ und einer Menge *A* sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

   $a) A \in P(A)$ $\quad b) A \subset P(A)$ $\quad c) \{\ \} \in P(A)$ $\quad d) \{\ \} \subset P(A)$

   $e) \{A\} \in P(A)$ $\quad f) \{A\} \subset P(A)$ $\quad g) \{\{\ \}\} \subset P(A)$ $\quad h) \{\{\ \}\} \in P(A)$

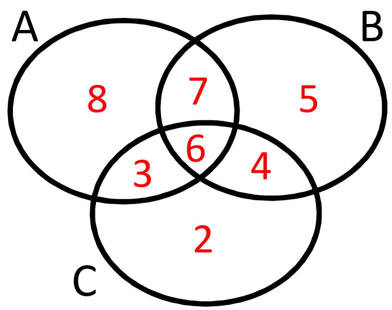
3) Bilden Sie die Potenzmenge basierend auf der Menge $A = \{\otimes; \nabla; \infty; \pi\}$.

AUFGABEN

4) Gegeben sei die Menge $A = \{\{\ \}; a; \{1;3\}; 5; \{5\}\}$.
Welche der folgenden Untermengen sind Zerlegungen von *A* (Begründung)?
$a)\{\{a\}; \{1;3\}; \{\{\ \}\}; \{5\}\}$ $\quad$ $b)\{\{a\}; \{1;3\}; \{\ \}; \{5; \{5\}\}\}$ $\quad$ $c)\{\{a; \{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{5; \{5\}\}\}$
$d)\{\{a\}; \{\{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{\{5\}\}; \{5\}\}$ $\quad$ $e)\{\{5; a; \{1;3\}\}; \{\{\ \}\}; \{5\}\}$

5) Gegeben sei die Menge $A = \{\alpha; \beta; \varepsilon\}$, $B = \{I; V\}$ und die Menge $C = \{x; y\}$.
a) Bilden Sie das kartesische Produkt AxBxC.
b) Bilden Sie das Kreuzprodukt aus AxB sowie aus CxA (grafische Darstellung).

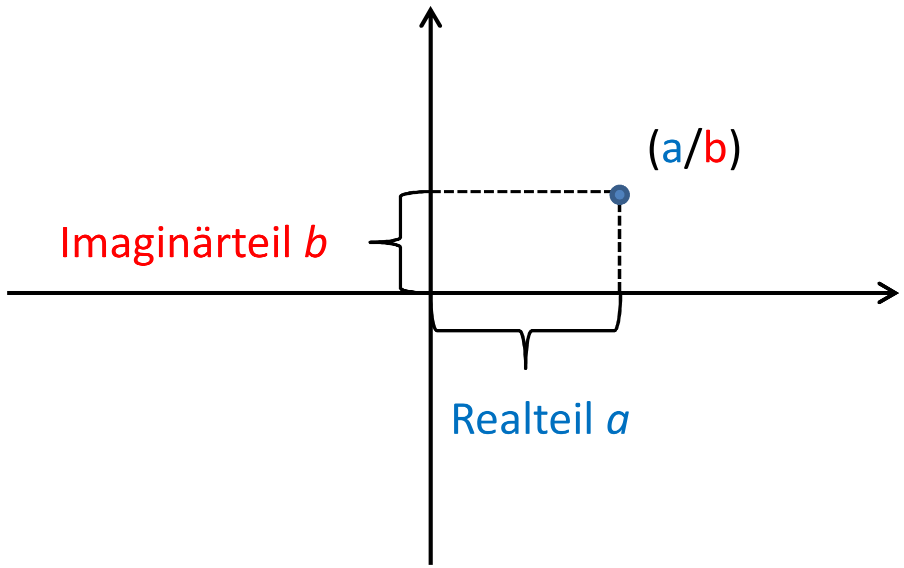
6) Ermitteln Sie die gefragten Lösungsmengen aufgrund des gegebenen Venn‘schen Diagramms.
$a) A \cup C$ $\quad$ $d) (A \cup B) \setminus C$
$b) A \setminus (B \cup C)$ $\quad$ $e) (A \cap B) \setminus (A \cup C)$
$c) (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $\quad$ $f) (C \cup A) \cap (B \cup C)$



KOMPLEXE ZAHLEN I

$$z = a + b \cdot i; i = \sqrt{-1}$$

Realteil   Imaginärteil



$$i^{0+4 \cdot n} = 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 0$$

$$i^{1+4 \cdot n} = i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 1$$

$$i^{2+4 \cdot n} = (-1) \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 2$$

$$i^{3+4 \cdot n} = (-1) \cdot i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 3$$

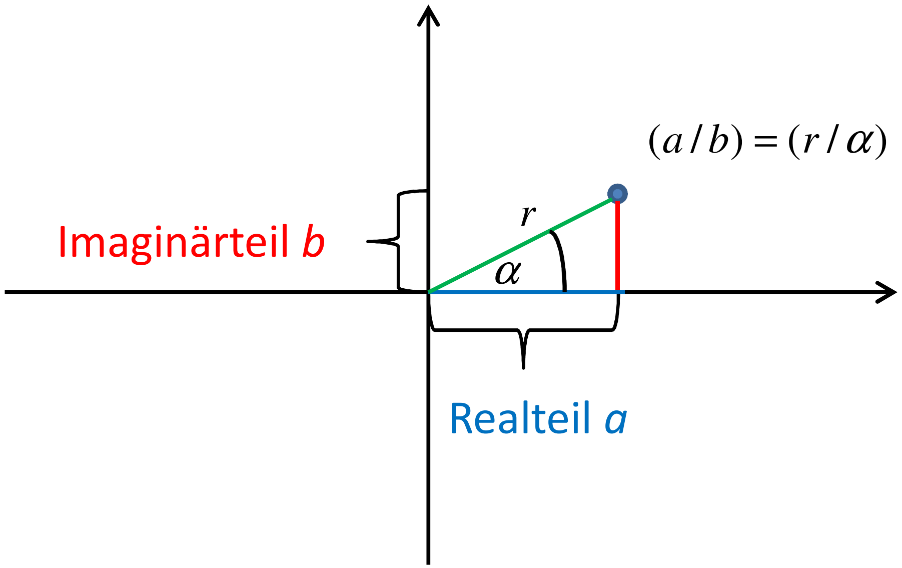
<u>Beispiel:</u>

$$(3+2i)+(7-5i) = (3+7)+(2-5)i = 10-3i$$

$$(3+2i) \cdot (7-5i) = (3 \cdot 7)+(3 \cdot (-5i))+(2i \cdot 7)+(2i \cdot (-5i)) = 21-15i+14i-10i^2 = 31-i$$

$$2i^3 \cdot (3+2i)^2 = -2i \cdot (9+12i+4i^2) = -2i \cdot (5+12i) = 24-10i$$

KOMPLEXE ZAHLEN II



a = Ankathete

b = Gegenkathete

r = Hypotenuse

Betrag: $r=\sqrt{a^2+b^2}$

Argument: $\alpha=\arctan\frac{b}{a}+x \quad \begin{cases} a>0\wedge b>0 \Rightarrow x=0\pi \\ a>0\wedge b<0 \Rightarrow x=2\pi \\ a<0\wedge b>0 \Rightarrow x=\pi \\ a<0\wedge b<0 \Rightarrow x=\pi \end{cases}$

KOMPLEXE ZAHLEN III

Darstellung einer komplexen Zahl:

✓<u>Kartesische Darstellung:</u> $z = a + b \cdot i$

✓<u>Trigonometrische Darstellung:</u> $z = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$

✓<u>Exponentielle Darstellung:</u> $z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$

Beispiel: $z = 3 - 4 \cdot i$

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \alpha &= \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 360 \approx 307° \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} z &= 5 \cdot (\cos(307) + i \cdot \sin(307)) \\ z &= 5 \cdot e^{i \cdot 307} \end{aligned}$$

KOMPLEXE ZAHLEN IV

Die konjugiert komplexe Zahl:

Um den Imaginärteil einer komplexen Zahl zu beseitigen , wird mittels des 3. Binoms der Ausdruck erweitert (konjugiert komplexen Zahl).

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$$

Betrag: $z = 2 - 5i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 5i$

$$r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(2 - 5i) \cdot (2 + 5i)} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Division: $\frac{9 - 2i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{27 - 6i - 9i + 2i^2}{3^2 - i^2} = \frac{25 - 15i}{10} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} i = 2{,}5 - 1{,}5i$

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels kartesischer Form an. Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

$$1)\ (1-2i)^3 \cdot \left[(3-i)\cdot(2i+6)\cdot i\right]$$

$$2)\ \frac{3+2i}{4-i}+\frac{-12-3i}{2i-3}$$

$$3)\ (2+3i)^2 \cdot 2(1-2i)^2 \cdot i^{13}$$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?