

Wiederholung zum 05.12.2012

Wenn man ein Vektorensystem auf lineare (**Un**)Abhängigkeit prüfen möchte, dann bildet man im ersten Schritt die **Linearkombination** der zugehörigen Vektoren, in dem man vor jeden Vektor einen Parameter setzt. Diese Kombination muss den **Nullvektor** ergeben.

Nach Lösung des entstehenden Gleichungssystems untersucht man die berechnete **Lösungsmenge**. Kommt als Ergebnis nur die **Triviallösung** heraus, so sind die Vektoren linear unabhängig und bilden dadurch eine sogenannte **Basis**. Kommt zusätzlich zu der Triviallösung **mindestens** eine weitere Lösung heraus, so sind die Vektoren linear **abhängig**. Das bedeutet, dass man einen Vektor durch Kombination der übrigen Vektoren **darstellen** kann.

Ist eine Basis vorhanden so gibt die Anzahl der Vektoren die **Dimension** des Systems an und der Span der Vektoren bildet somit den **Raum** der Dimension.

Das äußere Produkt (**Vektorprodukt**) zweier Vektoren bildet eine **binäre** Operation, d.h. als Lösung muss immer ein Vektor herauskommen. Die einzelnen Komponenten erhält man, in dem man in der Mitte beginnt und **rechts** herum positiv und **links** herum negativ rechnet.

Der Euklidische Vektorraum wird durch die drei **Koordinateneinheitsvektoren** gebildet. Diese stehen für die drei Achsen des Raums und bilden ein **Orthonormalsystem**, da sie zum Einen **senkrecht** aufeinander stehen und zum Anderen die Länge **eins** ist.

Wenn eine Gerade durch zwei Punkte definiert wird so erhält man im Bereich der Vektoren die sogenannte **Parameterdarstellung**. Diese bildet man, in dem man einen Startvektor wählt und dann den **Richtungsvektor** mittel der Differenz aus Endpunkt und **Anfangspunkt** bestimmt.

Um die Lage zweier Geraden untersuchen zu können, werden im ersten Schritt die Richtungsvektoren auf **lineare Abhängigkeit** untersucht. Trifft dies zu, so können die Geraden entweder **parallel** oder identisch zueinander liegen.

Bei Unabhängigkeit werden die Geraden **gleichgesetzt** und das entstehende Gleichungssystem gelöst. Bekommt man eine eindeutige Lösung heraus, so existiert ein **Schnittpunkt**. Wenn ein Widerspruch als Lösung herauskommt, so verlaufen die beiden geraden **windschief**.

$$1) \quad e_1: \vec{a} = (2; 1; 4)^T; \vec{b} = (-1; 3; 0)^T; \vec{c} = (2; 3; -2)^T$$

$$e_2: \vec{x} = (-1; 2; 0)^T; \vec{y} = (-2; 1; -2)^T; \vec{z} = (3; -1; 4)^T$$

a) Ebenengleichung

b) Lsg (ggf. Schnittgerade oder Abstand)

$$2) \quad 3x - y + 4z = 8 \quad \Rightarrow \text{Parameterform}$$

$$3) \quad -x + 3y + z = 4 \quad \wedge \quad g: \vec{x} = (1; 2; -3)^T$$

$$\vec{y} = (2; -1; 4)^T$$



Lsg (Abstand oder Schnittpunkt)

$$4) \quad e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad Q(1; 2; -1) \quad (3; 2; ?)$$

Liegt $A(3; 2; -5)$ auf der Ebene?

1)

$$e_1: \vec{x} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}; \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -18 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$e_2: \vec{x} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$e_1: -4x - 18y - 6z = 2 \cdot 7 + 9 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 25$$

$$2x + 9y + 3z = 25$$

$$e_2: -10(-1) - 4 \cdot 7 + 7 \cdot 0 = 2$$

$$-10x - 4y + 7z = 2$$

$$\vec{u}_1 = \gamma \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

↙

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ -44 \\ 82 \end{pmatrix} = \vec{s}$$

$$\vec{a}: \left| \begin{array}{l} 2x + 9y + 3z = 25 \\ -10x - 4y + 7z = 2 \end{array} \right| \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad z = 0$$

$$x = \frac{25}{2} - \frac{5 \cdot 17z}{82}$$

$$2x + 9y = 25 \quad \wedge \quad 41y = 82 \quad 17z \quad y = 17z/41$$

$$2) \quad 3x - y + 4z = 8$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad e: -x + 3y + z = 4$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - 3\alpha \\ z = -3 + 7\alpha \end{array} \right\}$$

$$-(1 + \alpha) + 3 \cdot (2 - 3\alpha) + (-3 + 7\alpha) = 4$$

$$-1 - \alpha + 6 - 9\alpha - 3 + 7\alpha = 4$$

$$-3\alpha = 2$$

$$\alpha = -2/3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4 \\ -23/3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 18 \cdot 3 \\ 13 \cdot 2 \end{matrix} \} 80$$

$$\frac{-4 \cdot \varepsilon}{45} \quad \frac{-4\varepsilon}{45}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$-4\varepsilon = -35$$

$$\varepsilon = 35/4$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha - \beta = 1 \\ -4\alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - 5\beta = -9 \end{pmatrix} \quad \left(\cdot 5 \right)$$

$$\underline{(3; 2; \varepsilon)^T}$$

$$\begin{matrix} 3\alpha - \beta & = & 1 \\ -\alpha & 0 & = 2 \\ 17\alpha & 0 & = -4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -2 \\ \alpha = -4/17 \end{matrix} \} \neq$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 18 \cdot 2 + 13 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 45 \\ 18x + 13y - 4z = 45 \end{matrix}$$