Wiederholung zum 28.11.2012

Wenn man mindestens einen Operator mit einer definierten Menge in Verbindung setzt, dann fällt es unter dem Bereich der **Algebraischen** Strukturen. Bei der kleinsten möglichen Struktur handelt es sich um eine **Gruppe**.

Diese existiert wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

- **Binäre** Operation
- Assoziativgesetz
- **Neutrales** Element
- **Inverses** Element

Man spricht von einer binären Operation, wenn durch die Rechnung die vorhandene Welt **nicht verlassen** wird.

Nach der Gruppe gibt es als Strukturen den **Ring**, **Körper** und dann den Raum.

Handelt es sich um einen Raum, so nennen wir die darin enthaltenen Objekte **Vektoren** und die Parameter sind die sogenannten **Skalare**.

Wird ein Vektor mit einer Zahl multipliziert, so wird jede einzelne **Komponenten** mit dem Faktor mal genommen und es ist eine **skalare Multiplikation**.

Zwei Vektoren werden addiert, in dem man alle Komponenten einzeln addiert. Auch beim inneren Produkt (**Skalarprodukt**) wird komponentenweise multipliziert und die entstehenden Produkte anschließend **addiert**. Somit handelt es sich um keine **binäre Operation**, da nur eine Zahl (Skalar) als Lösung herauskommt.

S 67 Nr 2 PI

$$\left|\begin{array}{rrrrl}
\alpha & +2\beta & -3\gamma & -9\delta & =0 \\
2\alpha & & +\gamma & +7\delta & =0 \\
-\alpha & +\beta & +2\gamma & & =0 \\
3\alpha & +5\beta & +\gamma & +4\delta & =0
\end{array}\right| \quad |\cdot(-2) \quad + \quad |\cdot(-3) \quad +$$

$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

↓

Triviallösung

↓

linear unabhängig

↓

$B(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$

↓

Dimension 4

↓

$\mathbb{R}^4$

PII

$$\left|\begin{array}{rrrrl}
\alpha & +2\beta & -3\gamma & -9\delta & =0 \\
0 & -4\beta & +7\gamma & +25\delta & =0 \\
0 & 3\beta & -\gamma & -9\delta & =0 \\
0 & -\beta & +10\gamma & +31\delta & =0
\end{array}\right| \quad 13 \quad + \quad |\cdot(-4)$$

$$\left|\begin{array}{rrrrl}
\alpha & +2\beta & -3\gamma & -9\delta & =0 \\
0 & -\beta & +10\gamma & +31\delta & =0 \\
0 & 0 & +29\gamma & +84\delta & =0 \\
0 & 0 & -33\gamma & -99\delta & =0
\end{array}\right| \quad \gamma = -3\delta$$

$$29\cdot(-3\delta) + 84\delta = -87\delta + 84\delta = -3\delta = 0$$

3) P_I
$$\left|\begin{array}{rrrl} x & +2y & -3z & =0 \\ \alpha x & +y & -\beta z & =0 \\ -x & & +z & =0 \end{array}\right| \quad \Big| \cdot(-\alpha) \quad +$$

$$-2\alpha y + y = (1-2\alpha)\,y$$
$$3\alpha z - \beta z = (3\alpha-\beta)\cdot z$$

P_I
$$\left|\begin{array}{llll} x & +2y & -3z & =0 \\ 0 & +(1-2\alpha)y & +(3\alpha-\beta)\cdot z & =0 \\ 0 & +2y & -2z & =0 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \quad y = z$$

$$(1-2\alpha)\cdot z + (3\alpha-\beta)\cdot z = [1-2\alpha+3\alpha-\beta]\cdot z$$
$$= \underbrace{(1+\alpha-\beta)}_{\neq 0}\cdot z = 0$$

$$\beta \neq 1+\alpha$$

S 77) 1) a) $\begin{pmatrix}-2\\8\\-4\end{pmatrix} = r \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} r = -2 \\ r = -2 \\ r = -2 \end{array}\right\} = \checkmark$

$\Rightarrow$ linear abhängig $\Leftrightarrow$ parallel / identisch

$\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}3\\-8\\3\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} p = 3 \\ p = +2 \\ p = 3/2 \end{array}\right\} \neq$

$\ominus$

$\Rightarrow$ parallel

b) $\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix} = r \begin{pmatrix}2\\-5\\-8\end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{l} r = -1/2 \\ r = -2/5 \\ r = -5/8 \end{array}\right\} \neq$

$\Rightarrow$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Schnittpunkt / windschief

$\ominus$

$g_1 = g_2 : \begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix}2\\-5\\-8\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l|l} \mathrm{I} & -\alpha - 2p = 1 \\ \mathrm{II} & 2\alpha + 5p = -3 \\ \mathrm{III} & 5\alpha + 8p = -8 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot 2 \ +, \quad \cdot 5 \ + \end{array} \right.$

$\ominus$

windschief

$\mathrm{II}\ p = -1 \ ; \ \mathrm{III}\ -2p = -3$

$\neq$