# Wiederholung zum 21.11.2012

In der Aussagenlogik wird die existierende Welt aus **zwei** Zustände beschränkt.

Eine Aussage liegt dann vor, wenn einem Satz **eindeutig** der Wert **Wahr** oder Falsch zugeordnet werden kann. Ist diese Aussage von einer zusätzlichen Information bzw. **Variablen** abhängig, so handelt es sich um eine **Aussageform**.

Die Operatoren sind im Wesentlichen die gleichen wie in der **Mengenlehre**, wobei als neue Junktoren die **Subjunktion** als auch die Bijunktion definiert sind.

Um eine Schaltung näher untersuchen zu können, kann die zugrundeliegende Formel mittels **elementarer** Umformungen vereinfacht werden oder man nutzt die Methode der **Wahrheitstabellen**. Dabei werden bei n Eingängen $2^n$ verschiedene Eingabemuster untersucht.

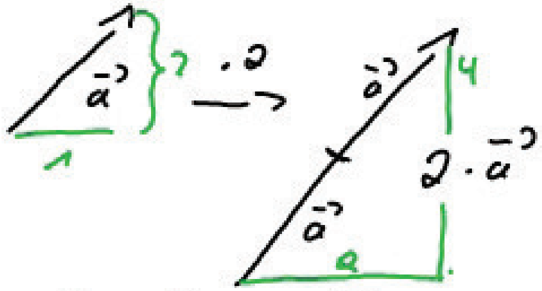
Die Lösung einer Aufgabe der Aussagenlogik wird als **Erfüllungsmenge** der Aussage bezeichnet, wobei es insgesamt 3 unterschiedliche **Formelklassen** gibt:

- ✓ **Tautologie** (allgemeingültig)
- ✓ Kontingenz (**lösbar**)
- ✓ **Kontradiktion** (unlösbar)

Aufgrund dieser Verallgemeinerung kann man aus einer **Subjunktion** eine Implikation und aus einer Bijunktion eine **Äquivalenz** beweisen.

# Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

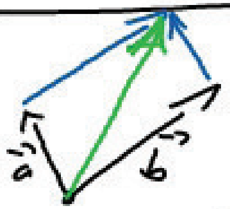



$$\beta \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \beta \\ a_2 \cdot \beta \\ \vdots \\ a_n \cdot \beta \end{pmatrix}$$

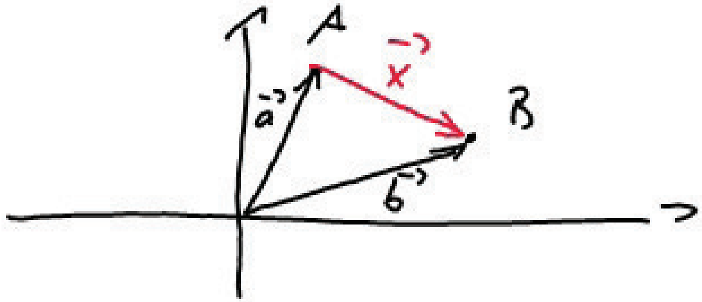
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -25 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

---




$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$




$$\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$$

Betrag = Länge $\quad r = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

$\Rightarrow$ Länge 1

$$\sqrt{f(\vec{a}, \vec{a})}$$

skalare Multiplikation

---

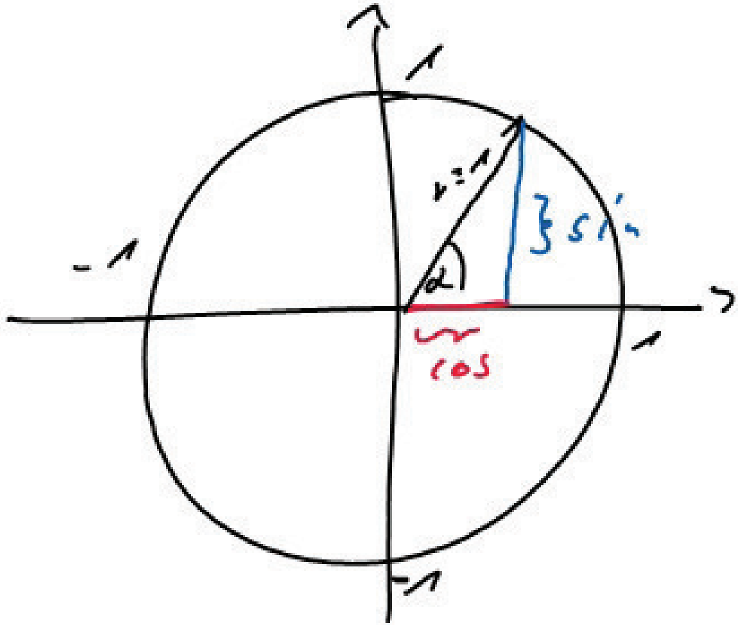
Innere Produkt $\Rightarrow$ Zahl

$$\vec{a} * \vec{b} = f(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n)$$

$$f(\vec{a}, \vec{a}) = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + \ldots + a_n \cdot a_n > 0$$

Winkel = Argument

$$\alpha = \arccos \boxed{\frac{f(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$




$$\cos\alpha \in [-1; 1]$$

$$\alpha = \arccos [-1; 1]$$

Orthogonalität ⊾

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \vec{x}\text{-Achse} & (1,0) \\ y\text{-Achse} & (0,1) \end{array}}_{\text{Ortho-Normal-System}}$$

$$\cos 90° = 0$$

$$90° = \arccos 0$$

$$\frac{f(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0$$

$$\boxed{f(\vec{a}, \vec{b}) = 0}$$

# AUFGABEN

1) Berechnen Sie – sofern möglich - das innere Produkt der folgenden Vektoren untereinander sowie deren Summe/ Differenz und bilden Sie jeweils den normierten Vektor.

→ Betrag
→ Abstand
→ Winkel
da wo geht.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen und berechnen anschließend deren Abstände.

a)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ X \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ Y \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

S 59 Nr. 1)

$$\vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}; \quad f(\vec{a}; \vec{c}) = 8 + 0 - 6 - 30 = -28$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4+0+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{16+36+4+25} = \sqrt{81} = 9$$

$$\measuredangle(\vec{a}, \vec{c}) = \arccos \frac{-28}{63}$$

$$\arccos \frac{-4}{9}$$

$$|\vec{a} - \vec{c}| = \sqrt{4+36+25+121} = \sqrt{186}$$

---

$$\vec{b} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} - \vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{b}; \vec{d}) = -12 + 0 - 16 = -28$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{16+49+16} = \sqrt{81} = 9$$

$$\measuredangle(\vec{b}, \vec{d}) = \arccos \frac{-28}{45}$$

$$|\vec{b} - \vec{d}| = \sqrt{49+49+64} = \sqrt{162}$$

2)

a) $f(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow -15 + 6 - x + 4 = 0$

$$-5 - x = 0$$
$$x = -5$$

$$|\;| = \sqrt{90}$$

b) $f(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow -8 + 6 + 0 + 2y - 6 = 0$

$$-8 + 2y = 0$$
$$y = 4$$

$$|\;| = \sqrt{91}$$

I. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x-4 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} = x(x-4) + 2x - 15 = 0$

$$x^2 - 4x + 2x - 15 = 0$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0$$
$$(x-5)(x+3) = 0$$
$$x_1 = 5 \lor x_2 = -3$$

$$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 + 15}$$
$$1 \pm \sqrt{16}$$
$$5 \;;\; -3$$

$$\left| 2\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}39\\27\\3\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}x\\-1\\3\end{pmatrix}\cdot 2\right| = 1$$

$$\left|2\cdot\begin{pmatrix}1-2-13\\3-4-9\\4-1-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x\\-2\\6\end{pmatrix}\right|=1$$

$$2\cdot\begin{pmatrix}14+x\\-11\\5\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}-28\\-20\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x\\-2\\6\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{matrix}-28+2x\\-22\\10\end{matrix}\right| = 1$$

$$\left|\begin{matrix}-14+x\\-11\\5\end{matrix}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{(-14+x)^2+(-11)^2+5^2} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{196-28x+x^2+121+25} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2-28x+342} = \frac{1}{2}$$

$$x^2-28x+342 = \frac{1}{4}$$