Wiederholung zum 12.12.2012

Bei den Ebenen unterscheiden wir die **Parameterform** und die parameterfreie Darstellung. Wenn wir eine Ebenengleichung durch drei Punkte bestimmen wollen, so müssen die zugehörigen Vektoren **linear unabhängig** sein, da es sonst nur eine Gerade wäre.

Für die Parameterform müssen wir ausgehend von einem der gegebenen Punkte die beiden **Richtungsvektoren** berechnen.

Wenn wir die **Hesse'sche Normalform** (parameterfreie Darstellung) erzeugen möchten, müssen wir im ersten Schritt den **Stellungsvektor** durch das äußere Produkt der beiden Richtungsvektoren berechnen. Dieser Stellungsvektor entspricht grafisch gesehen einem **senkrechten Na**gel auf der Ebene. Um den letzten Parameter für die parameterfreie Darstellung berechnen zu können, setzen wir den **Startvektor** der Ebene in die Gleichung ein und berechnen *d*.

Bei der gegenseitigen Lage zweier Ebenen im Euklidischen Vektorraum gibt es drei Möglichkeiten:

- ✓ **Schnittgerade**
- ✓ **Parallelität**
- ✓ **Identität**

Zur Prüfung bilden wir zuerst die beiden **Stellungsvektoren** und testen auch hier, ob diese beiden Vektoren linear abhängig sind. Ist dies der Fall, so wählen wir einen **beliebigen** Punkt der ersten Ebene und setzen diesen in die zweite Ebene ein. Stimmt die entstehende Aussage, so sind beide Ebenen **identisch**, anderenfalls verlaufen Sie parallel.

Sollten die beiden Stellungsvektoren **linear unabhängig** sein, so muss eine Schnittgerade vorhanden sein. Damit wir die zugehörige Gleichung erstellen können, bilden wir das **äußere Produkt** der beiden Stellungsvektoren und erhalten dadurch den **Richtungsvektor** der Schnittgeraden.

Da der Startvektor auf beiden Ebenen **gleichzeitig** liegen muss erhalten wir ein Gleichungssystem, das aus **drei** Unbekannten und **zwei** Gleichungen besteht. Also dürfen wir eine Variable frei wählen und können anschließend die beiden fehlenden Koordinaten berechnen.

Für die Abstandberechnung gibt es eigentlich nur drei verschiedene Möglichkeiten:

- ✓ **Punkt-Gerade**
- ✓ Gerade-Gerade (**windschief**)
- ✓ **Punkt Ebene**

Das liegt einfach daran, dass wir bei zwei **parallelen** Geraden/ Ebenen immer einen Punkt auf der Geraden/ Ebenen bestimmen und dadurch wieder in der Formel Punkt-Gerade/Ebene sind.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} * \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 4} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}_{4\times 1}$

2) $i \cdot \begin{pmatrix} 3i & 2 \\ -i & 4i \\ 2 & i \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} i & 2 & -3i \\ 4i & -i & 5i \end{pmatrix} + 2i \cdot \begin{pmatrix} i & -2i & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3i & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} i & 2i & 1 \\ -i & 3 & -2i \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

5) $Rg \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & \beta & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$

3) $$\begin{vmatrix} i & 2i & 1 \\ -i & 3 & -2i \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} i & 2i \\ -i & 3 \\ 4 & 1 \end{matrix} = \left.\begin{matrix} -6i + 16 - i \\ \ominus \\ -4 + 2 + 12 \end{matrix}\right\} = -7i + 6$$

4) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 24 + 10 - 3 \\ \ominus \\ -60 + 3 + 4 \end{matrix} = \left.\begin{matrix} 31 \\ \ominus \\ -53 \end{matrix}\right\} 84$$

5) $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \left.\begin{matrix} 12 - 6 + 6 \\ \ominus \\ -16 + 27 + 1 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 12 \\ - \\ 12 \end{matrix}\right\} = 0$$

$\Rightarrow$ singulär

$4 - 9 = -5 \neq 0 \Rightarrow$ regulär und Rang $= 2$

6) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & p & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$5p + 12 + 4 = 5p + 16$

$\ominus \qquad \ominus$

$-p - 40 + 6 \qquad -p - 34$

$+6p + 50 = 0$

$6p = -50 \Rightarrow p = -25/3$

1) $\begin{pmatrix} 42 \\ 39 \\ 10 \end{pmatrix}$

2) $i \cdot \begin{pmatrix} -3+8i & 4i & 9+10i \\ -15 & -2i+4 & -23 \\ 2i-4 & 5 & -6i-5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3i-8 & -4 & 9i-10 \\ -15i & 2+4i & -23i \\ -2-4i & 5i & 6-5i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6i \\ -2i & 2i & 4i \\ 6 & 8i & 2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3i-10 & 0 & 15i-10 \\ -17i & 2+6i & -19i \\ 4-4i & 13i & 6-3i \end{pmatrix}$$