

Wiederholung zum 05.12.2012

Wenn man ein Vektorensystem auf lineare (**Un**)Abhängigkeit prüfen möchte, dann bildet man im ersten Schritt die **Linearkombination** der zugehörigen Vektoren, in dem man vor jeden Vektor einen Parameter setzt. Diese Kombination muss den **Nullvektor** ergeben.

Nach Lösung des entstehenden Gleichungssystems untersucht man die berechnete **Lösungsmenge**. Kommt als Ergebnis nur die **Triviallösung** heraus, so sind die Vektoren linear unabhängig und bilden dadurch eine sogenannte **Basis**. Kommt zusätzlich zu der Triviallösung **mindestens** eine weitere Lösung heraus, so sind die Vektoren linear **abhängig**. Das bedeutet, dass man einen Vektor durch Kombination der übrigen Vektoren **darstellen** kann.

Ist eine Basis vorhanden so gibt die Anzahl der Vektoren die **Dimension** des Systems an und der Span der Vektoren bildet somit den **Raum** der Dimension.

Das äußere Produkt (**Vektorprodukt**) zweier Vektoren bildet eine **binäre** Operation, d.h. als Lösung muss immer ein Vektor herauskommen. Die einzelnen Komponenten erhält man, in dem man in der Mitte beginnt und **rechts** herum positiv und **links** herum negativ rechnet.

Der Euklidische Vektorraum wird durch die drei **Koordinateneinheitsvektoren** gebildet. Diese stehen für die drei Achsen des Raums und bilden ein **Orthonormalsystem**, da sie zum Einen **senkrecht** aufeinander stehen und zum Anderen die Länge **eins** ist.

Wenn eine Gerade durch zwei Punkte definiert wird so erhält man im Bereich der Vektoren die sogenannte **Parameterdarstellung**. Diese bildet man, in dem man einen Startvektor wählt und dann den **Richtungsvektor** mittel der Differenz aus Endpunkt und **Anfangspunkt** bestimmt.

Um die Lage zweier Geraden untersuchen zu können, werden im ersten Schritt die Richtungsvektoren auf **lineare Abhängigkeit** untersucht. Trifft dies zu, so können die Geraden entweder **parallel** oder identisch zueinander liegen.

Bei Unabhängigkeit werden die Geraden **gleichgesetzt** und das entstehende Gleichungssystem gelöst. Bekommt man eine eindeutige Lösung heraus, so existiert ein **Schnittpunkt**. Wenn ein Widerspruch als Lösung herauskommt, so verlaufen die beiden geraden **windschief**.

$$1) \quad \vec{a} = (3; -2; 1)^T; \quad \vec{b} = (-1; 1; 0)^T; \quad \vec{c} = (2; 3; 5)^T$$

$$\vec{x} = (4; 2; 1)^T; \quad \vec{y} = (2; -1; 4)^T; \quad \vec{z} = (-1; 3; 2)^T$$

$\Rightarrow$ Ebenengleichung & Lsg $\xrightarrow{\text{Stn. Hgen. d. d.}}$ Abstand

$$2) \quad 2x - 3y + z = 4 \quad \Rightarrow \text{paramet. / o. -}$$

$$3) \quad \left. \begin{array}{l} -3x + 2y - 2z = 6 \quad -e \\ \vec{a} = (2; -4; 1)^T; \quad \vec{b} = (3; -2; 2)^T \end{array} \right\} \text{Lsg}$$

$$1) \quad e_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$e_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -13 \\ -17 \end{pmatrix}$$

$$e_1: x + y - z = d = 3 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow x + y - z = 0$$

$$e_2: 6x + 13y + 17z = d = 24 + 16 + 17 \Rightarrow 6x + 13y + 17z = 67$$

$$\Rightarrow \text{Schnittgerade: } \left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -23 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 6x + 13y + 17z = 67 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = z \\ 6z + 0 + 17z = 67 \\ z = 67/23 \approx 3 \end{array} \right\} \begin{pmatrix} 23 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 30 \\ -23 \\ 7 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

$$2) \quad 2x - 3y + z = 4 \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad -3x + 2y - 2z = 6$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} x = 2 + \alpha \\ y = -4 + 2\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{array} \right\}$$

$$-3(2 + \alpha) + 2(-4 + 2\alpha) - 2(1 + \alpha) = 6$$

$$-6 - 3\alpha - 8 + 4\alpha - 2 - 2\alpha = 6$$

$$-\alpha = 22$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - 22 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow S(-20; -48; -21)$$

Abstand: 1) $3x - 2y + 5z = 10$; $Q(3; 4; 1)^T$

2) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $2x - 3y + 1z = 8$

$e: (3; -4; 0)^T$; $(4; -1; 1)^T$; $(5; 2; 8)^T$

1) $d = \frac{|9 - 8 + 5 - 10|}{\sqrt{9 + 4 + 25}} = \frac{|-4|}{\sqrt{38}} \approx \frac{2}{3}$

$$2) \left(\begin{array}{c} 1 \\ -3 \\ 4 \end{array} \right) = \gamma \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \gamma = -1/2 \\ \gamma = -3 \end{array} \right\} \neq \text{linear unabhängig}$$

$$S_1 = g_2 \quad \left(\begin{array}{c} 1 \\ 7 \\ 0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 1 \\ 7 \\ 3 \end{array} \right) = \alpha \left(\begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ -4 \end{array} \right) + \beta \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right)$$

$$-\alpha - 2\beta = 0$$

$$3\alpha + \beta = 0$$

$$-4\alpha - \beta = 3$$

$$\Rightarrow \alpha = -2\beta$$

$$-6\beta + \beta = 0$$

$$8\beta - \beta = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta = 0 \\ \beta > 0 \end{array} \right\} \neq$$

$$d = \frac{\left| \left| \left(\begin{array}{c} 1 \\ 7 \\ 0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 1 \\ 7 \\ 3 \end{array} \right) \right| \times \left| \left(\begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ -4 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right) \right| \right|}{\left| \left(\begin{array}{c} 1 \\ -3 \\ 4 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right) \right|} = \frac{\left| \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ -5 \end{array} \right) \right|}{\left| \left(\begin{array}{c} -1 \\ -7 \\ -5 \end{array} \right) \right|} \stackrel{\text{Lindseif}}{=} \frac{|-15|}{\sqrt{1+49+25}}$$

$$d = \frac{15}{\sqrt{75}}$$