Wiederholung zum 21.11.2012

In der Aussagenlogik wird die existierende Welt aus **zwei** Zustände beschränkt.

Eine Aussage liegt dann vor, wenn einem Satz **eindeutig** der Wert **Wahr** oder Falsch zugeordnet werden kann. Ist diese Aussage von einer zusätzlichen Information bzw. **Variablen** abhängig, so handelt es sich um eine **Aussageform**.

Die Operatoren sind im Wesentlichen die gleichen wie in der **Mengenlehre**, wobei als neue Junktoren die **Subjunktion** als auch die Bijunktion definiert sind.

Um eine Schaltung näher untersuchen zu können, kann die zugrundeliegende Formel mittels **elementarer** Umformungen vereinfacht werden oder man nutzt die Methode der **Wahrheitstabellen**. Dabei werden bei n Eingängen $\mathbf{2^n}$ verschiedene Eingabemuster untersucht.

Die Lösung einer Aufgabe der Aussagenlogik wird als **Erfüllungsmenge** der Aussage bezeichnet, wobei es insgesamt 3 unterschiedliche **Formelklassen** gibt:

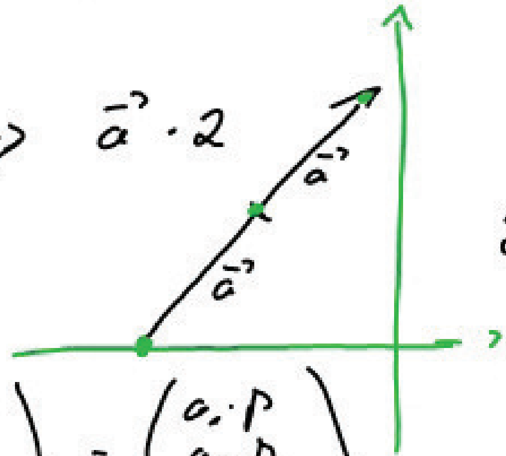
- ✓ **Tautologie** (allgemeingültig)
- ✓ Kontingenz (**lösbar**)
- ✓ **Kontradiktion** (unlösbar)

Aufgrund dieser Verallgemeinerung kann man aus einer **Subjunktion** eine Implikation und aus einer Bijunktion eine **Äquivalenz** beweisen.

Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

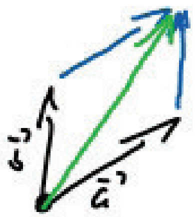
$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot 2$



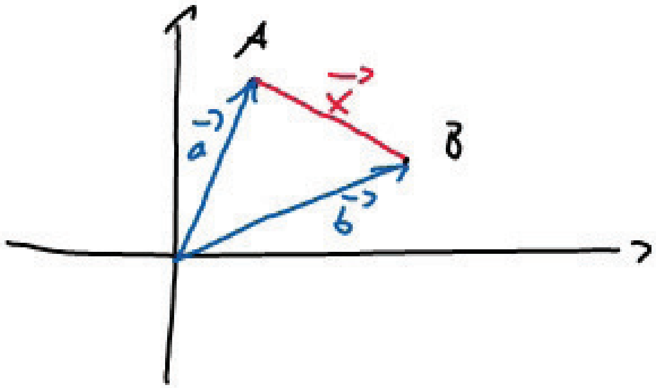
$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\beta \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \beta \\ a_2 \cdot \beta \\ a_3 \cdot \beta \end{pmatrix}$$

$$; \quad \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$



$$: \quad \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3+1 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Innere Produkt: $$f(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \left. \begin{matrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \\ \vdots \\ a_n \cdot b_n \end{matrix} \right\} \Sigma$$

$$\alpha = \arccos \frac{f(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie – sofern möglich - das innere Produkt der folgenden Vektoren untereinander sowie deren Summe/ Differenz und bilden Sie jeweils den normierten Vektor.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

-> Betrag
-> Winkel
(wo möglich)
+ Abstand ☺

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen und berechnen anschließend deren Abstände.

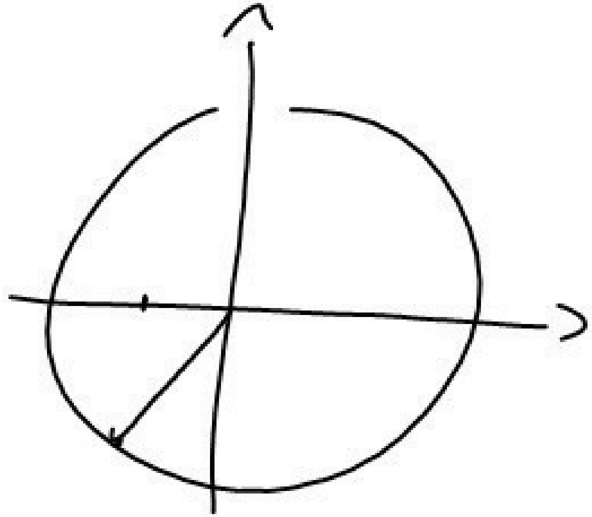
a)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ X \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ Y \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

S 59 1)



$$|\vec{a}| = \sqrt{4+0+9+36} = \sqrt{49} = 7$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = \sqrt{25} = 5$$
$$|\vec{c}| = \sqrt{16+36+4+25} = \sqrt{81} = 9$$
$$|\vec{d}| = \sqrt{16+49+16} = \sqrt{81} = 9$$
$$|\vec{e}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{a} - \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{a} * \vec{c} = \left.\begin{matrix} 8 \\ 0 \\ -6 \\ -30 \end{matrix}\right\} S -28$$

$$\sphericalangle \vec{a}\vec{c} = \arccos \frac{-28}{7 \cdot 9} = \arccos \frac{-28}{63} = \arccos \frac{-4}{9}$$

$$|\vec{a}\vec{c}| = \left|\begin{matrix} -2 \\ 6 \\ -5 \\ 11 \end{matrix}\right| = \sqrt{4+36+25+121} = \sqrt{186}$$

$$\vec{s} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{s} - \vec{d} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{s} * \vec{d} = -17 + 0 \cancel{+8}6 = -28$$

$$\measuredangle\, \vec{s}\, \vec{d} = \arccos \frac{-28}{5 \cdot 9} = \arccos -\frac{28}{45}$$

$$|\vec{s}\, \vec{d}\,| = \left| \begin{matrix} -7 \\ -7 \\ 8 \end{matrix} \right| = \sqrt{49 + 49 + 64} = \sqrt{162}$$

2)

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = -15 + 6 - x + 4 = 0$

$$-5 - x = 0$$

$$x = -5$$

5)

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ y \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -8 + 6 + 0 + 2y - 6 = 0$$

$$-8 + 2y = 0$$

$$y = 4$$

I.

$$\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x-1 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} = x(x-1) + 2x - 15 = 0$$

$$x^2 - x + 2x - 15 = 0$$

$$x^2 + x - 15 = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 15}$$

$$-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{61}{4}}$$

$$\left| 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 27 \\ 3 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 2 \right] \right| = 1$$

$$\left| 2 \cdot \left[\begin{pmatrix} 1-2-3 \\ 3-4-9 \\ 4-1-1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right|$$

$$\left| 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2x-8 \\ -22 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = 1$$

$$\left| \begin{pmatrix} x-4 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + 121 + 25} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x^2 - 8x + 162} = \frac{1}{2} \qquad \lightning$$

$$x^2 - 8x + 162 = \frac{1}{4}$$