1) $a_n = 2 \cdot \sqrt[n]{n}$; $n \geq 3$

2) $a_{n+1} = -\frac{1}{3} \cdot (3 - 2a_n)$; $a_1 = 3$

1. Monotonie
2. Schranken
3. Konvergenz
4. Grenzwert

$a_3 = 2 \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot 3^{1/3}$ $\quad a_4 = 2 \cdot \sqrt[4]{4} = 2 \cdot 4^{1/4}$

$2 \cdot 3^{1/3} \gtrless 2 \cdot 4^{1/4} \quad | :2$

$3^{1/3} \gtrless 4^{1/4} \quad | \,^{12}$

$3^4 \gtrless 4^3$

$81 > 64 \qquad a_3 > a_4$

<u>Behauptung</u>: $\quad a_{n+1} < a_n$

$a_{n+1} < a_n$ $\qquad 2\cdot\sqrt[4]{4} < 2\cdot\sqrt[3]{3}$

$n=3 \quad a_4 < a_3 \quad \ldots\ldots \quad 64 < 81 \quad \checkmark$

$n=n+1 \quad a_{n+2} < a_{n+1}$

$$2\cdot\sqrt[n+2]{n+2} < 2\cdot\sqrt[n+1]{n+1} \quad \Big| \uparrow (n+2)(n+1) \quad \Big| : 2$$

$$(n+2)^{(n+1)} < (n+1)^{(n+2)}$$

$$(n+2)^n \cdot (n+2) < (n+1)^n \cdot (n+1)^2$$

$$\underbrace{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}_{\approx 1} < \frac{(n+1)^2}{n+2} = \frac{n^2+2n+1}{n+2}$$

$$\approx 1 \quad < n \approx \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

<u>Schranken</u>: $a_3 = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$ ist obere Schranke

$a_n > 2$ $a_n > 0$

$n = 3$ $a_3 = 2 \cdot \sqrt[3]{3} > 2 \quad |:2$ $2 \cdot \sqrt[3]{3} > 0 \quad \checkmark$

$\sqrt[3]{3} > 1 \quad \uparrow^3$

$3 > 1 \quad \checkmark$

$n = n+1$ $a_{n+1} > 2$ $a_{n+1} > 0$

$2 \cdot \sqrt[n+1]{n+1} > 2 \quad |:2$ $2 \cdot \sqrt[n+1]{n+1} > 0 \quad |:2$

$\sqrt[n+1]{n+1} > 1 \quad | \uparrow^{n+1}$ $\sqrt[n+1]{n+1} > 0 \quad \uparrow^{n+1}$

$n+1 > 1 \quad |-1$ $n+1 > 0 \quad |-1$

$n > 0 \quad \checkmark$, da $n \geq 3$ $n > -1$

3) $a_n = 2/n + 1 \quad ; \quad n \geq 1$

$a_1 = 3 \quad ; \quad a_2 = 2$

<u>Behauptung</u> $\quad a_{n+1} < a_n \qquad \downarrow$

$n=1 \qquad a_2 < a_1 \quad \Rightarrow \quad 2 < 3 \quad \checkmark$

Wir gehen davon aus, dass die Folge streng monoton fallend ist und zeigen:

$n = n+1 \qquad a_{n+2} < a_{n+1}$

$$\frac{2}{n+2} + 1 < \frac{2}{n+1} + 1 \qquad | -1 \quad \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \qquad | \cdot (n+2) \cdot (n+1)$$

$$n+1 < n+2 \qquad | -n \qquad \Rightarrow \quad 1 < 2 \quad \checkmark$$

Schranken: Da a_n streng monoton fallend ist, muss $a_1 = 3$ obere Schranke sein.

Behauptung: $a_n > 0$

$n=1$ $\quad a_1 > 0 \Rightarrow 3 > 0$ ✓

Wir gehen davon aus, dass 0 eine untere Schranke ist und zeigen,

$n = n+1$ $\quad a_{n+1} > 0$

$$\frac{2}{n+1} + 1 > 0 \qquad | -1$$

$$\frac{2}{n+1} > -1 \qquad | \cdot (n+1)$$

$$2 > -1 \cdot (n+1) = -n-1 \qquad | +1$$

$$3 > -n \qquad | \cdot (-1)$$

✓

$$n > -3$$

Da a_n streng monoton fällt und durch 0 und 3 begrenzt wird, ist sie auch beschränkt, somit konvergent und der Grenzwert muss existieren

Grenzwert: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \left[\frac{2}{\infty} + 1\right] = [0 + 1] = 1$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 1 \in [0; 3]$$