$\underline{n^3 - 4n}$; $n \geq 1$ ist durch 3 teilbar

$$\boxed{n^3 - 4n = 3 \cdot k \quad ; \; k \in \mathbb{Z}}$$

$n=1$ $\quad 1^3 - 4 = -3 = 3 \cdot k \quad \Rightarrow \quad k = -1 \in \mathbb{Z}$ ✓

$n = n+1$ $\quad (n+1)^3 - 4 \cdot (n+1) = 3 \cdot k$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 4n - 4 = 3 \cdot k$$

$$n^3 + 3n^2 - n - 3 = 3 \cdot k$$

$$(n^3 - 4n) + 3n^2 + 3n - 3 = 3 \cdot k$$

$$\underbrace{(n^3 - 4n)}_{3 \cdot k_1} + 3 \cdot \underbrace{(n^2 + n - 1)}_{k_2} = 3 \cdot k$$

$$3 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2 = 3 \cdot k_3$$

$$3 \cdot (k_1 + k_2) = 3 \cdot k_3 \quad \Rightarrow \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$(a^n - 1)$; $n \geq 1 \wedge a \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ ist durch $(a-1)$ teilbar

$n = 2$:

$$(a^2 - 1) = (a-1)\cdot k \quad ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$$(a+1)(a-1) = (a-1)\cdot k$$

$$a+1 = k \quad \checkmark$$

$\cancel{a^2 - a}$

$\cancel{\frac{a(a-1)}{a-1}} = a$

$n = n+1$:

$$a^{n+1} - 1 = (a-1)\cdot k$$

$$a\cdot a^n - 1 = (a-1)\cdot k$$

$a^n + ? = a\cdot a^n$

$? = a\cdot a^n - a^n$

$? = (a-1)\cdot a^n$

$$(a^n - 1) + \underline{(a-1)\cdot a^n}$$

$$(a-1)\cdot k_1 + (a-1)\cdot k_2 = (a-1)\cdot k_3$$

$$k_1 + k_2 = k_3 \quad ; \; k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$n^n > \underline{n!} \quad ; \quad n > 1$

$n = 2 \qquad 2^2 > 2! \quad \Leftrightarrow \quad 4 > 2 \qquad \checkmark$

$n = n+1 \qquad (n+1)^{n+1} > (n+1)!$

$$(n+1)^n \cdot (n+1) > (n+1) \cdot \underline{n!} \qquad | :(n+1)$$

$$(n+1)^n > n^n \qquad | \sqrt[n]{}$$

$$n+1 > n \qquad | -n$$

$$1 > 0 \qquad \checkmark$$

$$(n+3)! = (n+3) \cdot (n+2)(n+1) \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \ldots \; 3 \cdot 2 \cdot 1}_{}$$

$$(n+3)(n+2) \cdot (n+1) \quad \cdot \quad n!$$

$$(n+3) \cdot (n+2)!$$

$$(n^2+5n+6)\,(n+1)!$$

WS 2012/13 (10 Punkte)

$10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 \;;\; n \geq 0$ ist durch 9 teilbar

$n=0 \quad 10^0 + 3 \cdot 4^{0+2} + 5 = 1 + 48 + 5 = 54 = 9 \cdot k \;;\; k = 6 \in \mathbb{Z}$ ✓

$n = n+1 \quad 10^{n+1} + 3 \cdot 4^{(n+1)+2} + 5$

$10 \cdot 10^n + 3 \cdot 4^1 \cdot 4^{n+2} + 5 = 10 \cdot 10^n + 12 \cdot 4^{n+2} + 5$

$\underbrace{(10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5)}_{9 \cdot k} + 9 \cdot 10^n + 9 \cdot 4^{n+2}$

$+ 9 \cdot (\underbrace{10^n + 4^{n+2}}_{\mathbb{N}})$

$\mathbb{Z} \quad + \quad \mathbb{N} \quad \rightarrow \quad \mathbb{Z}$ ✓