1) $2^n > n^3 \quad ; \; n \geq 10$

2) $3^{n+1} + 2^{3n+1} \; ; \; n \geq 0$ durch 5 teilbar

3) $n^2 \geq n+5 \quad ; \; n \geq 3$

4) $7^{2\gamma} - 2^{\gamma} \; ; \; \gamma \in \mathbb{N}$ durch 47 teilbar

zu 1) $n=10 \qquad 2^{10} > 10^3 \iff 1024 > 1000$ ✓

$n = n+1 \qquad 2^{n+1} > (n+1)^3 \iff 2 \cdot 2^n > n^3 + 3n^2 + 3n + \underset{1}{1}$

$2 \cdot n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1$	$2 \cdot 2^n > 2^n + 3n^2 + 3n + 1$
-> Nullform	$2^n > 3n^2 + 3n + 1$
-> größte NS < 10	$2^{10} > 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1$
	$1024 > 331$

2) $3^{n+1} + 2^{3n+1} = 5 \cdot K \quad ; \quad K \in \mathbb{Z}$

$n=0 \quad 3^1 + 2^1 = 5 = 5 \cdot K \qquad K = 1 \in \mathbb{Z}$ ✓

$n = n+1 \quad 3^{(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} = 3^{n+2} + 2^{3n+4} = 5 \cdot K$

$3^1 \cdot 3^{n+1} + 2^3 \cdot 2^{3n+1} = 3 \cdot 3^{n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1}$

$3 \cdot (3^{n+1} + 2^{3n+1}) + 5 \cdot 2^{3n+1} \rightarrow 3 \cdot 5K_1 + 5 \cdot K_2 = 5 \cdot K_3$

K_3

$3 \cdot K_1 + K_2 = K_3$

$\downarrow$

$\mathbb{Z} + \mathbb{N} = \mathbb{Z}$ ✓

$8 \cdot (3^{n+1} + 2^{3n+1}) - 5 \cdot 3^{n+1}$

$8 \cdot (5K_1) - 5 \cdot K_2 = 5 \cdot K_3 \mid :5$

$8 \cdot K_1 - K_2 = K_3$

$8 \cdot \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}$ ✓

3) $n^2 \geq n+5 \quad ; \quad n \geq 3$

$n=3 \quad 3^2 = 9 \geq 8 \quad \checkmark$

$n+1: \quad (n+1)^2 \geq (n+1)+5 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 2n+1 \geq n+6$

$(n+5) + 2n+1 \geq n+6$

$3n+6 \geq n+6 \quad |-6-n$

$2n \geq 0 \quad \checkmark$

4) $7^{2r} - 2^r = 47 \cdot k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$

$r=1 \quad 49-2 = 47 = 47 \cdot k \quad \Rightarrow \quad k=1 \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$

$r=r+1 \quad 7^{2\cdot(r+1)} - 2^{r+1} = 7^{2r+2} - 2^{r+1} = 49 \cdot 7^{2r} - 2 \cdot 2^r$

$$2 \cdot (\underbrace{7^{2r} - 2^r}) + 47 \cdot 7^{2r} = 47 \cdot k$$

$$2 \cdot 47 \cdot k_1 + 47 \cdot k_2 = 47 \cdot k_3 \quad |:47$$

$$2 \cdot \mathbb{Z} + \mathbb{N} = \mathbb{Z} \quad \checkmark$$