



Relation 'Beziehung von 2-n Objekten'

Äquivalenzrelation

Ordnungsrelation

Äquivalenzklassen

natürliche Reihenfolge

reflexiv

jeder Paar \in Relation



transitiv

logische Schlussfolgerung

symmetrie

antisymmetrie

(reflexiv) + asymmetrie

1) $M = \{ \text{alle Menschen} \}$ $M \times M$

Relation $(M_1, M_2) \in M \times M$ mit M_1 und M_2 haben die gleiche Mutter.

2) $\varphi = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \frac{a}{b} = 2 \cdot k + 1 ; k \in \mathbb{N}_0 \}$

1) $(a, a) \in \text{Relation}$ (reflexiv), $a \in M$

Jeder Mensch $M_1 \in M$ hat mit sich selbst die gleiche Mutter.

transitiv

$(a, b) \in \text{Relation} \wedge (b, c) \in \text{Relation} \Rightarrow (a, c) \in \text{Relation}$

Mutter(M_1) = Mutter(M_2) \wedge Mutter(M_2) = Mutter(M_3)

$\xrightarrow{\hspace{10em}} \text{Mutter}(M_1) = \text{Mutter}(M_3) \xleftarrow{\hspace{10em}}$

symmetrie: $(a, s) \in \text{Relation} \wedge (s, a) \in \text{Relation}$

$$\text{Mutter}(M_1) = \text{Mutter}(M_2) \Leftrightarrow \text{Mutter}(M_2) = \text{Mutter}(M_1)$$

\Rightarrow Äquivalenzrelation

\rightarrow Klassen $\hat{=}$ Geschwister

WS 2012/13: $A = \{ \text{Alle Kinder eines Kindergartens} \}$

$\delta = \{ (a, s) \in A \times A \mid \text{Kind } a \text{ ist jünger oder gleich alt wie Kind } s \}$

$$2) \varphi = \{(k, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a/b = 2k+1; k \in \mathbb{N}_0\}$$

reflexiv: $(a, a) \in \varphi, a \in \mathbb{N}$

$$a/a = 2k+1, a \neq 0$$

$$1 = 2k+1 \Leftrightarrow k=0 \in \mathbb{N}_0$$

transitiv: $(a, b) \in \varphi \wedge (b, c) \in \varphi \Rightarrow (a, c) \in \varphi; a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\frac{a}{b} = 2k_1 + 1 \quad \wedge \quad \frac{b}{c} = 2k_2 + 1$$

$$b = \frac{a}{2k_1 + 1} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2k_1 + 1}}{c} = 2k_2 + 1$$

$$\frac{a}{2k_1 + 1} \cdot \frac{1}{c}$$

$$\frac{a}{c} = (2k_2 + 1) \cdot (2k_1 + 1)$$

$$= 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2k_3 + 1 \quad | -1 / : 2$$

$$\frac{2k_1k_2 + k_1 + k_2}{\mathbb{N} + \mathbb{N} + \mathbb{N}} = k_3 \quad \checkmark \rightarrow \mathbb{N}$$

Symmetrie : $(9, 3) \rightarrow \frac{9}{3} = 2k+1 \Leftrightarrow 3 = 2k+1 ; k=1$
 $(3, 9) \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \nexists$

$(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \notin \mathcal{R} ; a \neq b$

antisymmetrie,
 da
 reflexiv
 +
 symmetrie

$\frac{a}{b} = 2k_1 + 1 \wedge \frac{b}{a} = 2k_2 + 1 \quad \uparrow^{-1}$
 $\frac{a}{b} = \frac{1}{2k_2 + 1}$

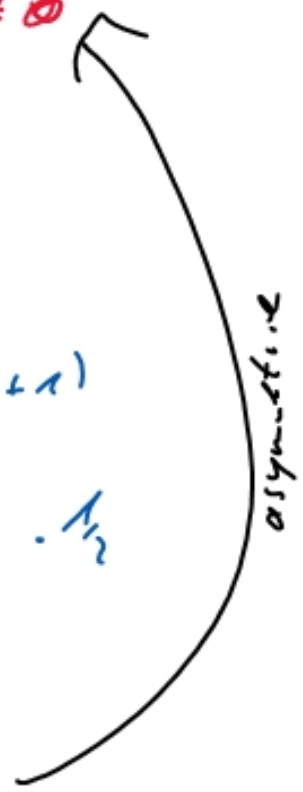
$2k_1 + 1 = \frac{1}{2k_2 + 1} \quad | \cdot (2k_2 + 1)$

$(2k_1 + 1)(2k_2 + 1) = 1$

$4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 = 1 \quad | -1 \cdot \frac{1}{2}$

$2k_1k_2 + k_1 + k_2 = 0$

$\Rightarrow k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow a = b$



\Rightarrow Ordnungsrelation