Relation 'Beziehung von 2-n Objekten'

Äquivalenzrelation

Ordnungsrelation

Äquivalenzklassen

natürliche Reihenfolge

reflexiv

jedes Paar $\in$ Relation

transitiv

logische Schlussfolgerung

symmetrie

antisymmetrie

(reflexiv) + asymmetrie

1) $M = \{$ alle Menschen $\}$ $\qquad M \times M$

Relation $(M_1, M_2) \in M \times M$ mit M_1 und M_2 haben die gleiche Mutter.

2)

$\varphi = \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \frac{a}{b} = 2 \cdot k + 1 \; ; \; k \in \mathbb{N}_0 \}$

1) $(a,a) \in$ Relation (reflexiv), $a \in M$

Jeder Mensch $M_1 \in M$ hat mit sich selbst die gleiche Mutter.

Transitiv

$(a,b) \in$ Relation $\wedge$ $(b,c) \in$ Relation $\Rightarrow$ $(a,c) \in$ Relation

Mutter(M_1) = Mutter(M_2) $\wedge$ Mutter(M_2) = Mutter(M_3)

$\Rightarrow M(M_1) = M(M_3)$

symmetrie $(a,b) \in$ Relation $\wedge$ $(b,a) \in$ Relation

Mutter (M_1) = Mutter (M_2) $\Leftrightarrow$ Mutter(M_2) = M(M_1)

=> Äquivalenzrelation

$\longrightarrow$ Klassen $\hat{=}$ Geschwister

WS 2012/13: $A = \{$ Alle Kinder eines Kindergartens $\}$

$\delta = \{(a,b) \in A \times A \mid$ Kind a ist jünger oder gleich alt wie Kind $b\}$

2) $\varphi = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a/b = 2k+1 \,;\, k \in \mathbb{N}_0\}$

reflexiv: $(a,a) \in \varphi \,,\; a \in \mathbb{N}$

$$a/a = 2k+1 \quad , a \neq 0$$

$$1 = 2k+1 \iff k = 0 \in \mathbb{N}_0$$

transitiv: $(a,b) \in \varphi \wedge (b,c) \in \varphi \Rightarrow (a,c) \in \varphi \,;\, a,b,c \in \mathbb{N}$

$$\frac{a}{b} = 2k_1+1 \quad \wedge \quad \frac{b}{c} = 2k_2+1$$

$$b = \frac{a}{2k_1+1} \Rightarrow \frac{a/(2k_1+1)}{c} = 2k_2+1$$

$$\to \frac{a}{2k_1+1} \cdot \frac{1}{c}$$

$$\frac{a}{c} = (2k_2+1)\cdot(2k_1+1)$$

$$= 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 = 2k_3+1 \quad \Big| -1 \;\Big| \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$2k_1k_2 + k_1 + k_2 = k_3 \quad ✓$$

$$\mathbb{N} + \mathbb{N} + \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

Symmetrie:

$(9,3) \to 9/3 = 2k+1 \Leftrightarrow 3 = 2k+1;\ k=1$

$(3,9) \to 3/9 = 1/3$ ↯

$(a,b) \in \rho \wedge (b,a) \notin \rho\ ;\ a \neq b$

antisymmetrie, da reflexiv + asymmetrie

$\underline{a/b = 2k_1+1} \wedge b/a = 2k_2+1 \quad |^{-1}$

$a/b = \underline{\frac{1}{2k_2+1}}$

$2k_1+1 = 1/(2k_2+1) \quad |\cdot(2k_2+1)$

$(2k_1+1)(2k_2+1) = 1$

$4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 = 1 \quad |-1\ \cdot\frac{1}{2}$

$2k_1k_2 + k_1 + k_2 = 0$

$\Rightarrow k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow a = b$

asymmetrie

=> Ordnungsrelation