MATHEMATIK

18.07.2019

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Auf welchen wesentlichen Schritten basiert die FREPL-Methode?
- ✓ Wie kann man die Betragsstriche eliminieren?
- ✓ Wofür benötigt man Ungleichungen?
- ✓ Wie lösen Sie eine Bruchungleichung auf?
- ✓ Wie stellen Sie eine Lösungsmenge zwischen zwei Zahlen dar?
- ✓ Warum ist eine Probe der Ergebnisse unbedingt notwendig?
- ✓ Wie lösen Sie eine auf ein Polynom basierte Ungleichung auf?
- ✓ Wie können Sie eine Ungleichung grafisch darstellen?

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was versteht man unter einem linearen Gleichungssystem?
- ✓ Wie funktioniert das Einsetzungsverfahren?
- ✓ Worauf ist beim Gleichsetzungsverfahren zu achten?
- ✓ Wie kann man ein LGS mit zwei Gleichungen zeichnerisch lösen?
- ✓ Wie zeichnen Sie eine Gerade in ein Koordinatensystem?
- ✓ Was versteht man unter dem Additionsverfahren?
- ✓ Was sucht man bei 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten?
- ✓ Was bedeutet die Pivot-Zeile eines LGS?

AUFGABEN

I. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben die Lösungsmenge an.

1) $\dfrac{2x-5}{4-2x} > \dfrac{1}{2}$

2) $x^3 + 3x^2 - 4x < 12$

3) $|2 - \dfrac{1}{2}x| > 1$

AUFGABEN

1) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem, in dem Sie insgesamt alle 3 Verfahren anwenden.

a) $\left| \begin{array}{l} 3y - 2x = 13 \\ 8x + 4y = -4 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{r} 2y = 1 - 0{,}5x \\ 0{,}25x = 0{,}6 - y \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{2}x = \frac{3}{5} - 3y \end{array} \right|$

2) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden LGS mittels der Cramerschen Regel.

$$\left| \begin{array}{r} x - 3y + z = -2 \\ -x + 2y - 3z = -6 \\ 2x + y + 4z = 16 \end{array} \right|$$

TRIGONOMETRIE I

Für die Sinus/ Cosinus-Funktion sind im Bereich der **Addition der Argumente** zwei **Additionstheoreme** definiert, wodurch stets bei **rechtwinkliger Konstellation** entweder ein Sinus oder ein Cosinus aus der Funktion **entfernt** werden kann.

1) $\boxed{\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \sin(b) \cdot \cos(a)}$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2x)$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(2x) = \cos(2x)$$

90° Phasenverschiebung
der Sinusfunktion = Cosinusfunktion

2) $\boxed{\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)}$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = \cos(\frac{3}{2}\pi) \cdot \cos(3x) + \sin(\frac{3}{2}\pi) \cdot \sin(3x)$$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = 0 \cdot \cos(3x) + (-1) \cdot \sin(3x) = -\sin(3x)$$

270° Phasenverschiebung
der Cosinusfunktion = -Sinusfunktion

AUFGABEN

I. Geben Sie Schätzungen für die folgenden Werte an.

$$a)\sin(300°) \qquad b)\cos(60°) \qquad c)\cos(400°) \qquad d)\sin(800°)$$

II. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit als möglich.

$$a)\sin(4x-\frac{3}{2}\pi) \qquad b)\cos(-\frac{1}{2}\pi+2x) \qquad c)\cos(\frac{3}{2}\cdot(2x+3\pi)$$

III. Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang.

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos(x)\right)$$

AUFGABEN

I. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit als möglich.

$$a)\sin(2x-9\pi)$$

$$b)\sin(2{,}5x-7{,}5\pi)$$

$$c)\cos(12\cdot(4x-5\pi)$$

$$d)\cos(\frac{1}{2}\cdot\left(7\pi+6x\right)-3{,}5\pi)$$

TRIGONOMETRIE II

Eine rein trigonometrische Funktion (**sinus/ cosinus**) stellt eine **Schwingung** innerhalb einer bestimmbaren **Periode** und eines konstanten Wertebereichs dar, die für alle reellen Zahlen definiert ist.

$$\boxed{f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d}$$

Die vier Parameter in der Funktion beziehen sich zum einen auf die **Verschiebung** und zum anderen auf die **Streckung/ Stauchung** in der x-Achsen bzw. y-Achsen-Richtung:

a:	Amplitudenfaktor	Streckung/Stauchung in y-Achsen-Richtung
b:	Periodenfaktor	Streckung/Stauchung in x-Achsen-Richtung
c:	Phasenverschiebung	Verschiebung in x-Achsen-Richtung
d:	Wertebereichverschiebung	Verschiebung in y-Achsen-Richtung

Symmetrie:

- SIN: Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x) \Rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$
- COS: Achsensymmetrie $f(x) = f(-x) \Rightarrow \cos(x) = \cos(-x)$

Bei dem Periodenfaktor gilt für die **neue Periode**: $\boxed{P_{NEU} = \frac{P_{ALT}}{b}}$

TRIGONOMETRIE III

Anhand der folgenden Vierfeldertafel können die grundlegenden Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion direkt abgelesen werden.

Es wird dabei davon ausgegangen, dass es sich um eine Standardfunktion in der Form $sin^n\big(g(x)\big)$ oder $cos^n\big(h(x)\big)$ handelt.

Vierfeldertafel

	$\boldsymbol{n = gerade}$	$\boldsymbol{n = ungerade}$
$\boldsymbol{sin^n\big(g(x)\big)}$	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = -f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
$\boldsymbol{cos^n\big(h(x)\big)}$	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$

TRIGONOMETRIE IV

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 3\pi) + 4$

Vereinfachung: $f(x) = 3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(3\pi) + \sin(3\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4$

$$f(x) = (-3) \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

Wertebereich: $-3 \cdot [-1;1] + 4 = [-3;3] + 4 \Longrightarrow W = y \in [1;7]$

Periode: $P_{NEU} = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi \Rightarrow f(x) = f(x + 3\pi)$

$$f(x) = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x + 3\pi)) + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 2\pi) + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

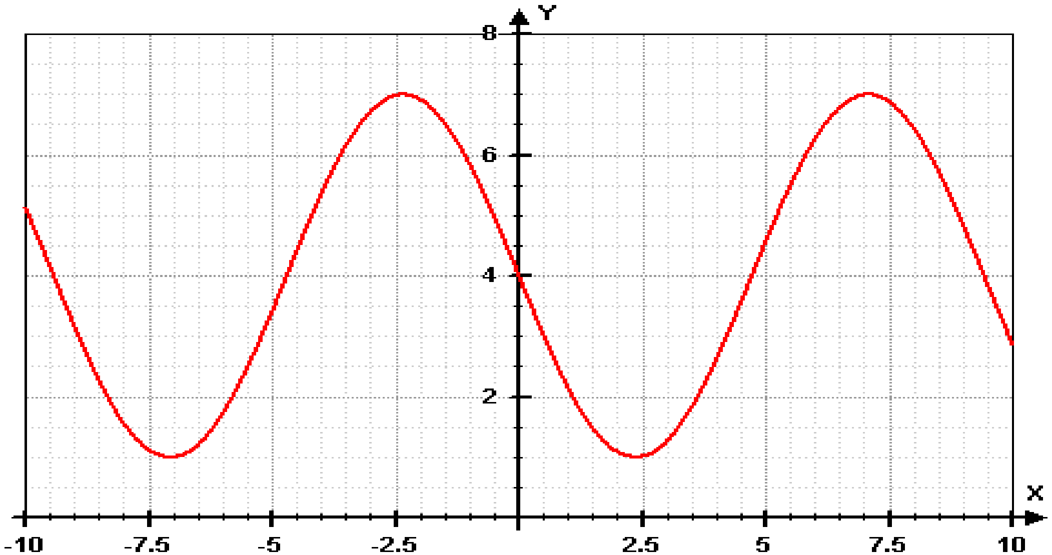
TRIGONOMETRIE V

Beispiel: $f(x) = (-3) \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$

Symmetrie: Punktsymmetrie $f(x) - 4 = -[f(-x) - 4]$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4 - 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) \\ -[f(-x) - 4] = -\left[-3 \cdot \sin(-\frac{2}{3}x) + 4 - 4\right] = 3 \cdot \sin(-\frac{2}{3}x) \end{array}\right\} =$$

Skizze:



AUFGABEN I

Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten und fertigen Sie eine Skizze an.

1) $f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(4x - 5\pi)$

2) $g(x) = 2 \cdot \sin^2(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\pi) + 5$

3) $h(x) = 3 \cdot [\cos(2x - \pi) + 2]$

4) $k(x) = 5 + \frac{2}{3} \cdot \cos^4(\frac{1}{2} \cdot (\pi - x))$

AUFGABEN II

Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten und beweisen Sie die Periode.

1) $f(x) = 2 - 0{,}5 \cdot \sin(3x - 5{,}5\pi)$

2) $g(x) = -4 \cdot \cos(2{,}5x - 12{,}5\pi) + 8$

3) $h(x) = 2 \cdot [\cos(4x - 2\pi) + 5] - 3$

4) $k(x) = 4 + \frac{1}{4} \cdot \left(\sin(\frac{7}{2} \cdot (\pi - 2x)) - 8 \right)$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann ist der Sinus bzw. der Cosinus immer NULL?
- ✓ Was versteht man unter einer Phasenverschiebung?
- ✓ Was wird im Einheitskreis senkrecht (/waagerecht eingezeichnet?
- ✓ Wie kann man am Einheitskreis mit dem Uhrzeigersinn drehen?
- ✓ Warum ist Sinus zu Cosinus um 90° Phasenverschoben?
- ✓ Wie ist der Tangens / Cotangens im rechtwinkligen Dreieck definiert?
- ✓ Wann ist der Sinus gleich dem Cosinus?
- ✓ Wofür braucht man die Additionstheoreme?

DER VEKTORRAUM

Handelt es sich um eine Struktur der Form $(\Re^n, +, *, \Re)$, so handelt es sich um einen **Raum**, sofern u.a. die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$(+)$ Addition:

- assoziativ — *Komponentenweise Addition*
- kommutativ — *Vertauschbarkeit der Komponenten*
- neutrales Element — $a = (0,0,0,..,0) = (0)^n$
- inverses Element — $\overline{a} = -a = (-a_1, -a_2, -a_3, .., -a_n) = (-a)^n$

$(*)$ Multiplikation: $\Re x \Re^n \rightarrow \Re^n; \vec{a} \in \Re^n \wedge \beta, \gamma \in \Re$

- binäre Operation — $\beta * \vec{a} \in \Re^n$
- distributiv — $(\beta + \gamma) * \vec{a} = \beta * \vec{a} + \gamma * \vec{a}$
- assoziativ — $\beta * (\gamma * \vec{a}) = (\beta * \gamma) * \vec{a}$
- neutrales Element — $\beta * \vec{a} = \vec{a}$

Die Objekte, die zu einer solchen Struktur gehören, nennt man zum einen **Vektoren**$(\vec{a} \in \Re^n)$ und zum anderen **Skalare**$(\beta \in \Re)$, d.h. ein Vektor ist eine **gerichtete Größe** (Länge und Winkel), der mittels einem Skalar (Parameter) verkürzt/ verlängert werden kann.

DAS SKALARPRODUKT

Bei der Multiplikation von zwei Vektoren nutzt man die Methodik des **inneren Produkts**.

$$\theta(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Es werden demzufolge die einzelnen Komponenten untereinander multipliziert und die Ergebnisse anschließend addiert. Als Ergebnis bekommt man somit keinen Vektor, sondern eine **reelle Zahl**.

Eigenschaften:

- nicht binär $\Re^n * \Re^n \to \Re$
- kommutativ $\theta(\vec{a},\vec{b}) = \theta(\vec{b},\vec{a})$
- assoziativ $\beta \cdot \theta(\vec{a},\vec{b}) = \theta(\beta \cdot \vec{a},\vec{b}) = \theta(\vec{a},\beta \cdot \vec{b})$
- distributiv $\theta(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = \theta(\vec{a},\vec{c}) + \theta(\vec{b},\vec{c})$
- positiv definiert $\theta(\vec{a},\vec{a}) > 0 \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot b_i = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 = 3$$

ÄUßERES PRODUKT (VEKTORPRODUKT)

Eine weitere Möglichkeit zwei Vektoren zu multiplizieren ist das **äußere Produkts**.
Es wird stets diagonal multipliziert (siehe Determinaten), wobei rechts herum positiv und links herum negativ gerechnet wird.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\cdot b_3-b_2\cdot a_3\\a_3\cdot b_1-b_3\cdot a_1\\a_1\cdot b_2-b_1\cdot a_2\end{pmatrix}$$

<u>Eigenschaften</u>:

- Binäre Operation: $\Re^n\times\Re^n\to\Re^n$
- antikommutativ $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
- assoziativ $\beta\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\beta\cdot\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\beta\cdot\vec{b}$
- distributiv $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2-3\cdot(-1)\\(-1)\cdot5-2\cdot3\\3\cdot3-5\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-11\\-1\end{pmatrix}$$

LÄNGE / WINKEL VON VEKTOREN

Da es sich bei einem Vektor um ein n-dimensionales Objekt handelt, kann der erreichte Punkt entweder mittels Koordinaten oder via Länge und Winkel dargestellt werden.

➢Länge: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\theta(\vec{a},\vec{a})}$

Normierter Vektor: $\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \vec{a}$ *(Länge ist Eins)*

Abstand $D\left(\vec{a},\vec{b}\right)$*:* $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$

➢Winkel: $\theta\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = \sqrt{\theta(\vec{a},\vec{a})} \cdot \sqrt{\theta\left(\vec{b},\vec{b}\right)} \cdot \cos\alpha$

Cauchy-Schwarze Ungleichung $\alpha = \arccos \frac{\theta\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\theta\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} \leq 1$

Orthogonalitätskriterium: $\cos(90^\circ) = 0 \Rightarrow \theta\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \wedge \left(\left|\vec{a}\right| \neq 0 \wedge \left|\vec{b}\right| \neq 0\right)$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie – sofern möglich - das innere Produkt der folgenden Vektoren untereinander sowie deren Summe/ Differenz und bilden Sie jeweils den normierten Vektor.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen und berechnen anschließend deren Abstände.

a)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ X \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ Y \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1) Berechnen Sie das innere Produkt der folgenden Vektoren, bestimmen Sie den Winkel sowie den Abstand zwischen den Vektoren und geben den normierten Vektor an.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen und berechnen anschließend deren Abstände.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \\ -3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ y \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ x \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4x \\ -x \end{pmatrix}$

LINEARE (UN)ABHÄNGIGKEIT

Grundlage der (Un)Abhängigkeit von Vektoren ist dessen **Linearkombination**, d.h. es wird jeder Vektor mit einem beliebigen **Skalar** multipliziert und anschließend die Summe gebildet.

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \ldots + \zeta \cdot \vec{z}$$

Im Fall der (Un)Abhängigkeits-Prüfung untersucht man, ob einer der Vektoren mittels einer Linearkombination der übrigen darstellbar ist, d.h. man bildet die Linearkombination der Vektoren und setzt diese Kombination gleich Null.

$$\alpha \cdot \vec{a} = \beta \cdot \vec{b} + \ldots + \zeta \cdot \vec{z} \Leftrightarrow \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \ldots + \zeta \cdot \vec{z} = \vec{0}$$

Existiert nur die sogenannte **Triviallösung** der Form $\alpha = \beta = \ldots = \zeta = 0$, dann sind die Vektoren **linear unabhängig**. Sollte eine der entstehenden Lösungen $\neq 0$ sein, dann sind sie **linear abhängig**.

<u>*Beispiel:*</u> $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = -2 \end{matrix}$

BASIS / SPAN

In einer **Basis** sind Objekte/ Vektoren enthalten, die einen zugehörigen **n-dimensionalen** Raum komplett auf**span**nen können.

Demzufolge besteht der Euklidische Vektorraum $\Re^3$ aus den 3 **Koordinaten-Einheits-Vektoren**:

$$\left.\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \left.\begin{array}{l} \textit{linear unabhängig} \\ \textit{normiert (Länge 1)} \\ \textit{orthogonal} \end{array}\right\} \textbf{Orthonormalsystem}$$

Grundvoraussetzung ist die lineare Unabhängigkeit, d.h. eine begrenzte Anzahl von linear unabhängiger Vektoren bilden eine Basis, wobei die Anzahl der enthaltenen Vektoren die Dimension des Raums angibt.

Die Dimension ist unabhängig von der Anzahl der Komponenten/ Koordinaten eines Vektors.

<u>Beispiel</u>: *Die drei Vektoren (letztes Beispiel) sind linear unabhängig und bilden demzufolge auch eine Basis. Da es sich um drei Basisvektoren handelt, spannen Sie einen Raum der 3. Dimension auf.*

LÖSUNGSMETHODIK

Frage: Bilden die gegebenen Vektoren eine Basis des $\Re^3$?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\left| \begin{array}{llll} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = 0 \\ 3\alpha & +1\beta & +1\gamma & = 0 \\ -2\alpha & -3\beta & +5\gamma & = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} |\cdot(-3) \quad |\cdot 2 \\ \big\} + \quad \big\} + \\ \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{llll} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = 0 \\ 0 & -5\beta & +10\gamma & = 0 \\ 0 & +1\beta & -1\gamma & = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \big\} + \\ |\cdot 5 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{llll} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = 0 \\ 0 & +1\beta & -1\gamma & = 0 \\ 0 & 0 & +5\gamma & = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$ Triviallösung: Die Vektoren sind linear unabhängig.

Es handelt sich somit um eine Basis $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ mit der Dimension 3.

Somit kann durch diese Basis der $\Re^3$ aufgespannt werden.

,
,

AUFGABEN

1) Sind die folgenden 3 Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear unabhängig?
Stellen Sie den Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ dar.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix};\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix};\vec{d}=\begin{pmatrix}6\\5\\-6\end{pmatrix}$$

2) Prüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren eine Basis bilden und geben die maximal mögliche Dimension mit dem zugehörigen Raum an.

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\5\end{pmatrix};\vec{c}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\1\end{pmatrix};\vec{d}=\begin{pmatrix}-9\\7\\0\\4\end{pmatrix}$$

3) Bestimmen Sie die Parameter $\alpha,\beta\in\Re$ so, dass das Vektorsystem (v_1,v_2,v_3) mit
$v_1=(1,\alpha,-1)^T$, $v_2=(2,1,0)^T$ und $v_3=(-3,-\beta,1)^T$ linear unabhängig ist.

AUFGABEN

1) Stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ dar.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

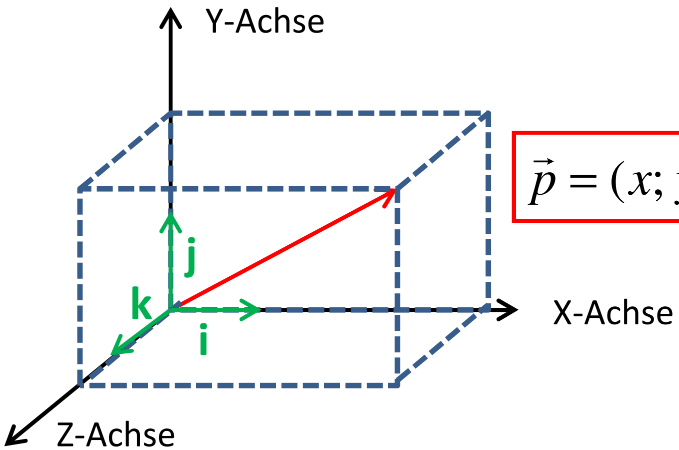
2) Bilden die gegebenen Vektoren eine Basis? Geben Sie die max. mögliche Dimension an.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

EUKLIDISCHER VEKTORRAUM

Als Grundlage für Geraden- und Ebenenberechnung im 3-dimensionalen Raum dient der Euklidische Verktorraum $\Re x \Re x \Re = \Re^3$.

Die Vektoren können nicht nur senkrecht, sondern auch in der waagerechten der sogenannten **transponierten** Form $(x; y; z)^T$ dargestellt werden.



$$\boxed{\vec{p} = (x; y; z)^T}$$

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} i = (1;0;0)^T \\ j = (0;1;0)^T \\ k = (0;0;1)^T \end{array}}\right\} \text{Koordinaten-einheitsvektoren}$$

Betrag: $|\vec{p}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Winkel: $\cos(i, \vec{p}) = \frac{x}{r}; \cos(j, \vec{p}) = \frac{y}{r}; \cos(k, \vec{p}) = \frac{z}{r}$

VEKTORENKLASSEN

Für die Vektorrechnung im Bereich von Geraden, Ebenen und Körper ist es wichtig die beiden möglichen Arten von Vektoren zu unterscheiden.

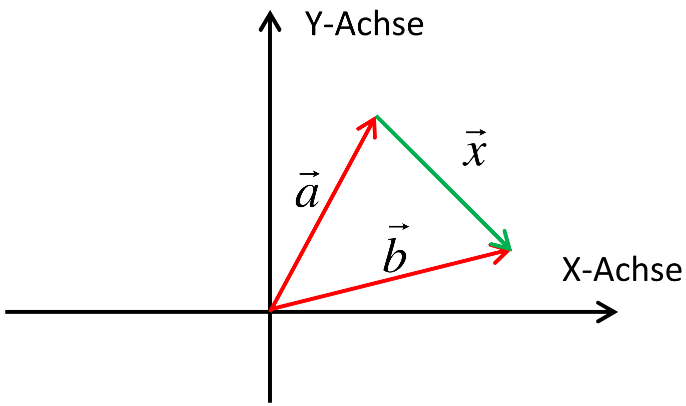
✓ Ortsvektor: Stellt die direkte Verbindung vom Ursprung zu einem beliebigen Punkt im Raum dar. $\vec{a} = \overline{0A}$

✓ Richtungsvektor: Werden zwei beliebige Punkte im Raum verbunden, so erhält man den Richtungsvektor, der sich stets aus der Differenz zwischen Endpunkt und Anfangspunkt berechnet. $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Beispiel:

✓Ortsvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

✓Richtungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$



GERADENGLEICHUNG

Eine Gerade ist die graphische Darstellung einer linearen Gleichung bestehend aus **Steigung** und **Startpunkt** bzw. Achsenabschnitt und wird in folgenden zwei Arten dargestellt.

- ✓ Parameterfreie Form: $y = m \cdot x + b$
  b=Achsenabschnitt; m = Steigung

- ✓ Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \alpha \cdot \overline{AB}$
  $\vec{a}$ = Ortsvektor (Startpunkt); $\overline{AB}$= Richtungsvektor

Beispiel:

- ✓ Parameterfreie Form:

$$\left.\begin{array}{l} A = (3;5) \\ B = (2;7) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{7-5}{2-3} = -2 \\ b = y - m \cdot x = 7 - (-2) \cdot 2 = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2 \cdot x + 11$$

- ✓ Parameterform:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} (-1)-2 \\ 2-1 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

,
,

AUFGABEN ZU GERADEN

1) Berechnen Sie das äußere Produkt der folgenden Vektoren.

   a) $\vec{a} = (2;-1;3)^T; \vec{b} = (-1;2;5)^T$

   b) $\vec{c} = (-2;4;1)^T; \vec{b} = (5;3;1)^T$

2) Berechnen Sie sowohl die parameterfreie als auch die Parameterform der Gerade durch die folgenden Punkte und fertigen Sie eine Skizze an.

   a) $A = (2;5); B = (-2;3)$

   b) $A = (-1;3); B = (2;-6)$

3) Geben Sie die Parameterform der Geraden durch folgende Punkte an.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

4) Prüfen Sie, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

   a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

LAGERELATION VON GERADEN I

Im Euklidischen Vektorraum $\Re^3$ handelt es sich um einen **3-dimensionalen Raum**, der durch die 3 Koordinanteneinheitsvektoren als **Basis** definiert ist.
Da eine Gerade nur ein 2-dimensionales Objekt ist, existieren insgesamt vier mögliche Lagerelationen:

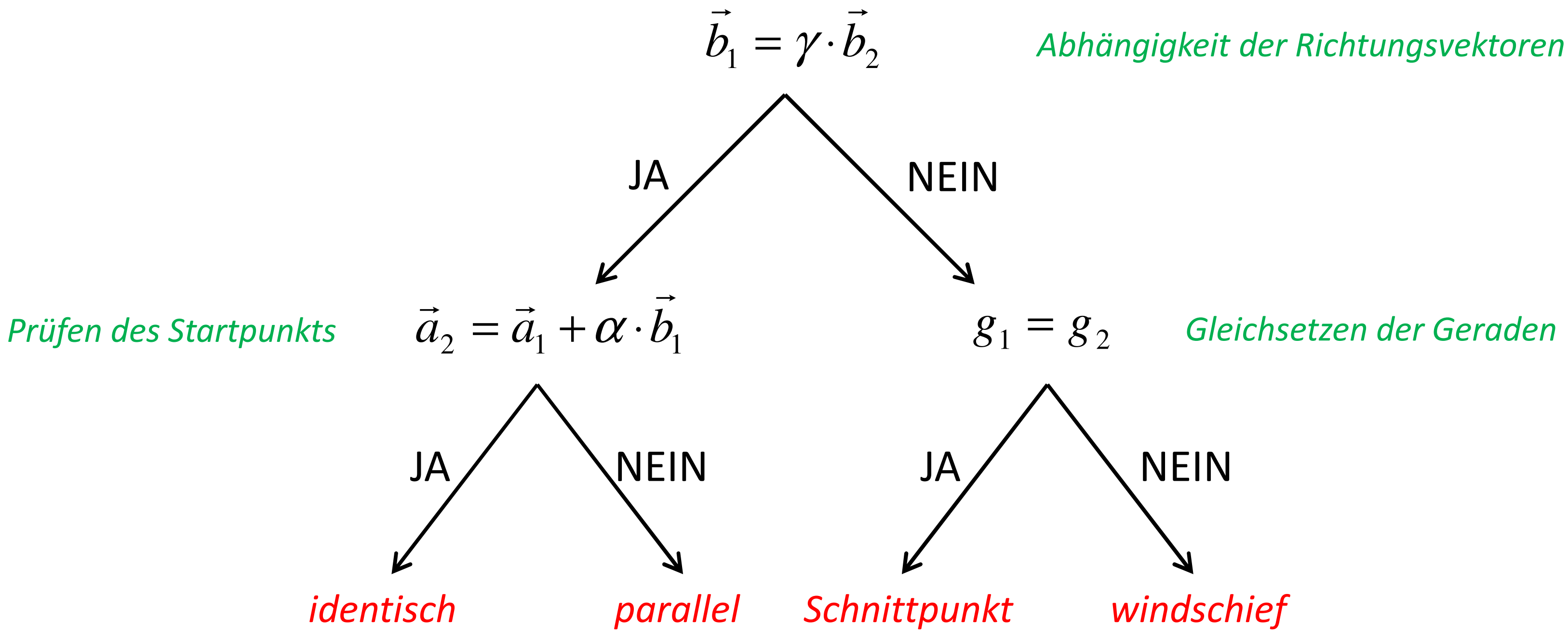
*Gerade = Startpunkt + Parameter * Richtungsvektor*

- ✓ parallel: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **nicht auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ identisch: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ schneiden sich: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich eine **eindeutige Lösung** für die Parameter.
- ✓ windschief: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich ein **Widerspruch** für die Parameter.

LAGERELATION VON GERADEN II

Aufgrund der definierten Lagerelationen ergibt sich der folgende Entscheidungsbaum:

$$g_1 : \vec{x}_1 = \vec{a}_1 + \alpha \cdot \vec{b}_1 \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \vec{a}_2 + \beta \cdot \vec{b}_2$$



LAGERELATION VON GERADEN III

Beispiel: $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. *Abhängigkeit der Richtungsvektoren*: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma = 3 \\ \gamma = 1 \\ \gamma = -4 \end{matrix}$

2. *Gleichsetzen der Geraden*: $g_1 = g_2 \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ -2\alpha & 2\beta & = & -2 \\ -4\alpha & -1\beta & = & 6 \end{matrix} \right| \begin{matrix} |\cdot 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad |\cdot(-1)$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ 4\alpha & 0 & = & -8 \\ -7\alpha & 0 & = & 9 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \alpha = -2 \wedge \alpha = -\frac{9}{7}$$

Aufgrund des Widerspruchs müssen die beiden Geraden windschief zueinander liegen.

,

,

AUFGABEN

1) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

a) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$

2) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden und geben deren Lage zueinander an.

a) $g_1 : \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2 : \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{a} = (2;-2;5)^T ; \vec{b} = (-1;1;3)^T$ $\qquad g_2 : \vec{c} = (-1;3;2)^T ; \vec{d} = (3;-2;5)^T$

,
,

AUFGABEN

1) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

a) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ $g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

2) Prüfen Sie, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}; \vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

AUFGABEN

1) Liegen die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden?

$$\vec{a} = (2;1;3)^T; \vec{b} = (4;-2;1)^T; \vec{c} = (6;-5;-1)^T$$

2) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden und geben deren Lage zueinander an.

$$g_1 : \vec{a} = (3;2;-1)^T; \vec{b} = (4;-2;2)^T \qquad g_2 : \vec{c} = (-3;4;2)^T; \vec{d} = (-1;-4;8)^T$$

3) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

$$g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

EBENENGLEICHUNG I

Eine Ebene im $\Re^3$ wird ähnlich wie eine Gerade durch **Orts- und Richtungsvektoren** definiert, wobei die **Parameterform** mittels einem Orts- und zwei zugehörigen Richtungsvektoren gebildet werden kann.
Bei der Bildung der Ebenengleichung ist die **lineare Unabhängigkeit** der Vektoren Voraussetzung.

Beispiel: $\vec{a} = (3;2;-1)^T ; \vec{b} = (4;-2;2)^T ; \vec{c} = (-1;3;-5)^T$

$$e : \vec{x} = \vec{a} + \alpha \cdot \overline{ab} + \beta \cdot \overline{ac}$$

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4-3 \\ -2-2 \\ 2-(-1) \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1-3 \\ 3-2 \\ -5-(-1) \end{pmatrix}$$

$$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \Re$$

EBENENGLEICHUNG II

Die sogenannte parameterfreie Darstellung basiert auf der **Hesse'schen Normalform** und lautet in der allgemeinen Beschreibung $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$.

Voraussetzung zur Bildung ist des **Stellungsvektors**.
Bei dem Stellungsvektor handelt es sich um den Vektor, der **senkrecht** auf der zugehörigen Ebene steht. Er wird mittels **äußerem Produkt** der Stellungsvektoren gebildet.

<u>Beispiel:</u> $$e : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \Re$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4) \cdot (-4) - (-1) \cdot 3 \\ 3 \cdot (-4) - (-4) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (-1) - (-4) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -16 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 19 \\ -16 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

$$19 \cdot x - 16 \cdot y - 15 \cdot z = d$$

$$19 \cdot 3 - 16 \cdot 2 - 15 \cdot (-1) = 40$$

$$\boxed{19 \cdot x - 16 \cdot y - 15 \cdot z = 40}$$

LAGERELATION VON GERADE/ EBENE

Will man die **gegenseitige Lage** von einer Geraden zu einer Ebene näher bestimmen, so werden die beiden Gleichungen in der **Parameterform** gleichgesetzt und mittels **Gaußverfahren** gelöst.

Es entstehen dadurch 3 unterschiedliche **Lösungsklassen**:

✓Keine Lösung:	Die Gerade verläuft **parallel** zur Ebene
✓Eine Lösung:	Es existiert ein **Schnittpunkt** zwischen Gerade und Ebene
✓Unendliche Lösungen:	Die Gerade **liegt in** der Ebene

<u>Beispiel:</u> $e:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\3\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\-3\end{pmatrix}\wedge g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix};\alpha,\beta,\gamma\in\Re$

$$e=g\Rightarrow\left|\begin{array}{cccc} -\alpha & -4\beta & -2\gamma & = -1\\ -4\alpha & -\beta & -\gamma & = 0\\ 3\alpha & -3\beta & +\gamma & = 5\end{array}\right| \begin{array}{l}|\cdot(-4)\ \ |\cdot(3)\\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow\left|\begin{array}{cccc} -\alpha & -4\beta & -2\gamma & = -1\\ 0 & 15\beta & 7\gamma & = 4\\ 0 & -15\beta & -5\gamma & = 2\end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{cccc} -\alpha & -4\beta & -2\gamma & = -1\\ 0 & 15\beta & 7\gamma & = 4\\ 0 & 0 & 2\gamma & = 6\end{array}\right|\Leftrightarrow\alpha=-\frac{7}{15};\beta=-\frac{17}{15};\gamma=3$$

Schnittpunkt $\begin{pmatrix}8\\5\\-2\end{pmatrix}$

LAGERELATION VON EBENE/ EBENE I

Will man die **gegenseitige Lage** von einer Ebene zu einer Ebene näher bestimmen, so werden die beiden Gleichungen ähnlich wie bei Geraden/ Ebenen gleichgesetzt und können u.a. ebenfalls mittels **Gaußverfahren** gelöst.

Da es sich bei dem zugehörigen Vektorraum um das **Euklidische System** handelt, entfällt die Möglichkeit der **windschiefen Lage**.

Dadurch entstehen 3 unterschiedliche **Lösungsklassen**:

✓Keine Lösung:	Die erste Ebene verläuft **parallel** zur zweiten Ebene Es entsteht aufgrund des Gleichungssystems ein **Widerspruch** bzw. sind die beiden Stellungsvektoren **linear abhängig**.
✓Unendliche Lösungen I:	Die erste Ebene **schneidet** die zweite Ebene (**Schnittgerade**) Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist von **einer** Variablen abhängig bzw. sind die Stellungsvektoren **linear unabhängig**.
✓Unendliche Lösungen II:	Die erste Ebene liegt in der zweiten Ebene (**Identität**). Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist von **zwei** Variablen abhängig bzw. sind die Stellungsvektoren **linear abhängig** und der zugehörige **Abstand ist Null**.

LAGERELATION VON EBENE/ EBENE II

Da es relativ kompliziert ist drei Gleichungen mit 4 Unbekannten mittels Gaußverfahren nach den **richtigen Variablen** freizustellen, empfiehlt es sich mittels der **Stellungsvektoren** der Ebenen die Lage der Ebenen zu klassifizieren.
Dadurch ergibt sich die folgende **Lösungsmethodik**:

1. <u>Parameterfreien Form</u>
   Es wird im ersten Schritt mittels Stellungsvektoren die **parameterfreie Form** gebildet.

2. <u>Abhängigkeit der Richtungsvektoren:</u>
   Sind die beiden **Stellungsvektoren linear abhängig** muss mittels Abstand Parallelität oder Identität geprüft werden. Sonst liegt eine Schnittgerade vor.

3. <u>Äußeres Produkt:</u>
   Durch Bildung des äußeren Produkts (**Vektorprodukt**) der Stellungsvektoren der beiden Ebenen erhält man den **Richtungsvektor der Schnittgeraden**.

4. <u>Gemeinsamer Punkt:</u>
   Mittels **Vorbelegung** einer beliebigen Variablen und anschließender Lösung des entstehenden Gleichungssystems kann ein gemeinsamer Punkt (**Startvektor**) berechnet werden.

LAGERELATION VON EBENE/ EBENE III

<u>Beispiel:</u> $e_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}\wedge e_2:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix};\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Re$

$$e_1:\vec{n}_1=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\0\\-1\end{pmatrix};e_2:\vec{n}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Parameterfreie Darstellung:

$e_1:9x+0y-z=d\Leftrightarrow 27+0+4=31 \quad \Rightarrow e_1:9x-z=31$

$e_2:0x+1y+1z=d\Leftrightarrow 0+2+2=4 \quad \Rightarrow e_2:y+z=4$

Richtungsvektor der Schnittgeraden:

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{pmatrix}9\\0\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-9\\9\end{pmatrix}$$

Startvektorder Schnittgeraden:

$z=5\Rightarrow e_1:9x-5=31\wedge e_2:y+5=4$

$\Leftrightarrow x=4\wedge y=-1$

Schnittgeraden

$$\boxed{g:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}1\\-9\\9\end{pmatrix}}$$

AUFGABEN

1) Bilden Sie die parameterfreie Darstellung und die Parameterform der folgenden ?

$$\vec{a} = (2;1;3)^T ; \vec{b} = (4;-2;1)^T ; \vec{c} = (1;2;-2)^T$$

2) Bestimmen Sie die jeweils andere Darstellungsform der Ebenen.

a) $e: 2x - 3y + 4z = 5$ b) $e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Wie liegen die folgenden Ebenen zueinander?

$$e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad e_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

1) Bilden Sie die Parameterdarstellung der folgenden Geraden und deren Lage.

$g_1 : (1;3;2)^T, (0;7;4)^T \qquad g_2 : (-10;8;6)^T, (-7;9;6)^T$

2) Bilden Sie die parameterfreie Darstellung der folgenden Ebenen und deren Lage.

$e_1 : (1;1;-1)^T, (2;2;0)^T, (-2;-2;-4)^T \qquad e_2 : (2;0;-1)^T, (3;6;1)^T, (1;2;-1)^T$

3) Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der Gerade und Ebene zueinander.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad e : (1;2;5)^T, (3;1;2)^T, (-2;4;1)^T$$

4) Wie liegen die folgenden Ebenen zueinander?

$$e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad e_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE I

Zur Berechnung von einem Abstand definieren wie den **Punkt** *Q* und die Gerade in der Form $g_n : \vec{x}_n = P_n + \alpha \cdot \vec{b}_n$ mit P_n als **Startpunkt** und $\vec{b}_n$ als **Richtungsvektor** der Geraden *n*.

- ✓ <u>Punkt zu Gerade</u>: $$d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}$$

- ✓ <u>Gerade zu Gerade (**parallel**)</u>: $$d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}$$

- ✓ <u>Gerade zu Gerade (**windschief**)</u>: $$d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\right|}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE II

Beispiel Punkt zu Gerade:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (Q - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}}$$

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 10 - 20 \\ -4 - (-15) \\ -15 - (-2) \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-10)^2 + 11^2 + (-13)^2}}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 4^2}} = \sqrt{\frac{390}{29}} \approx 3{,}67$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU GERADE III

Beispiel Gerade zu Gerade:
(parallel)

$$g_1 : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{b}_1 \times (P_2 - P_1)\right|}{\left|\vec{b}_1\right|}}$$

$$d = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 7-12 \\ -3-14 \\ 8-(-1) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}$$

$$d = \frac{\sqrt{(-5)^2 + (17)^2 + 9^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \sqrt{\frac{395}{14}} \approx 5{,}31$$

BEISPIELE ABSTAND

<u>Gerade zu Gerade:</u>
(windschief)

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\right|}{\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}}$$

$$d = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) * \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{\left|-15 + 6 - 15\right|}{\sqrt{38}} = \frac{24}{\sqrt{38}} \approx 3{,}89$$

ABSTAND PUNKT/GERADE ZU EBENE

Zur Berechnung von einem Abstand definieren wie den **Punkt** *Q* sowie die Gerade in der Form $g_n : \vec{x}_n = P_n + \alpha \cdot \vec{b}_n$ mit P_n als **Startpunkt** und $\vec{b}_n$ als **Richtungsvektor** der Geraden *n* und die zugehörige Ebene in der parameterfreien Darstellung $e : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$.

Aufgrund der parameterfreien Form der Ebene ergibt sich direkt der Stellungsvektor $\vec{n} = (a;b;c)^T$

Die Abstände werden wie folgt definiert:

✓ Punkt zu Ebene:

$$d = \frac{\left|\vec{n} * (Q - P_0)\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

$$d = \frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ *Hessesche Normalform*

✓ Gerade/Ebene zu Ebene:

$$d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * \vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

BEISPIELE ABSTAND

Ebene zu Ebene :
(parallel)

$e_1: 2x - 5y + 3z = 3 \qquad e_2: -4x + 10y - 6z = 8$

$$\boxed{d = \frac{\left|(P_2 - P_1) * \vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}}$$

$$d = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}\right) * \begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|-8 + 10 - 9\right|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{38}} \approx 1{,}14$$

Punkt zu Ebene :

$e_1: -x + 3y - 2z = 5 \qquad Q = (2;4;1)$

$$\boxed{d = \frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

$$d = \frac{(-1)\cdot 2 + 3\cdot 4 - 2\cdot 1 - 5}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \approx 0{,}8$$

AUFGABEN

1. Punkt zu Gerade:

   $g: A = (2;1;3); B = (-1;2;1)$ $\qquad Q = (2;5;-2)$

2. Punkt zu Ebene (parallel):

   $$e: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad Q = (4;1;15)$$

3. Gerade zu Gerade (windschief):

   $$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Gerade zu Ebene:

   $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad e: 2x + y + 3z = 13$$

AUFGABEN

1. Punkt zu Gerade:
   $g: A = (3;-1;4); B = (2;5;-2)$ $\qquad$ $Q = (-2;3;1)$

2. Punkt zu Ebene:

   $e: (2,1,-5)^T; (-1,3,-4)^T; (1,-2,1)^T$ $\qquad$ $Q = (2;-1;4)$

3. Gerade zu Gerade :

   $$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Gerade zu Ebene:

   $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e: x - 2y + z = 4$$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

JIPIEHHH, ES IST GESCHAFFT!!!!!