

MATHEMATIK

07.07.2017

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wann ist der Sinus bzw. der Cosinus immer NULL?
- ✓ Was versteht man unter einer Phasenverschiebung?
- ✓ Was wird im Einheitskreis senkrecht (/waagerecht) eingezeichnet?
- ✓ Wie kann man am Einheitskreis mit dem Uhrzeigersinn drehen?
- ✓ Warum ist Sinus zu Cosinus um 90° Phasenverschoben?
- ✓ Wie ist der Tangens / Cotangens im rechtwinkligen Dreieck definiert?
- ✓ Wann ist der Sinus gleich dem Cosinus?
- ✓ Wofür braucht man die Additionstheoreme?

DER VEKTORRAUM

Handelt es sich um eine Struktur der Form $(\mathfrak{R}^n, +, *, \mathfrak{R})$, so handelt es sich um einen **Raum**, sofern u.a. die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (+) Addition:
- assoziativ *Komponentenweise Addition*
 - kommutativ *Vertauschbarkeit der Komponenten*
 - neutrales Element $a = (0, 0, 0, \dots, 0) = (0)^n$
 - inverses Element $\bar{a} = -a = (-a_1, -a_2, -a_3, \dots, -a_n) = (-a)^n$
- (*) Multiplikation: $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n; a \in \mathfrak{R}^n \wedge \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$
- binäre Operation $\beta * a \in \mathfrak{R}^n$
 - distributiv $(\beta + \gamma) * a = \beta * a + \gamma * a$
 - assoziativ $\beta * (\gamma * a) = (\beta * \gamma) * a$
 - neutrales Element $\beta * a = a$

Die Objekte, die zu einer solchen Struktur gehören, nennt man zum einen **Vektoren** ($a \in \mathfrak{R}^n$) und zum anderen **Skalare** ($\beta \in \mathfrak{R}$), d.h. ein Vektor ist eine **gerichtete Größe** (Länge und Winkel), der mittels einem Skalar (Parameter) verkürzt/ verlängert werden kann.

DAS SKALARPRODUKT

Bei der Multiplikation von zwei Vektoren nutzt man die Methodik des **inneren Produkts**.

$$\theta(a,b) = a * b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Es werden demzufolge die einzelnen Komponenten untereinander multipliziert und die Ergebnisse anschließend addiert. Als Ergebnis bekommt man somit keinen Vektor, sondern eine **reelle Zahl**.

Eigenschaften:

- nicht binär $\mathfrak{R}^n * \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$
- kommutativ $\theta(a,b) = \theta(b,a)$
- assoziativ $\beta \cdot \theta(a,b) = \theta(\beta \cdot a,b) = \theta(a, \beta \cdot b)$
- distributiv $\theta(a+b,c) = \theta(a,c) + \theta(b,c)$
- positiv definiert $\theta(a,a) > 0 \wedge a \neq 0$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 a_i \cdot b_i = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 = 3$$

ÄUßERES PRODUKT (VEKTORPRODUKT)

Eine weitere Möglichkeit zwei Vektoren zu multiplizieren ist das **äußere Produkts**.

Es wird stets diagonal multipliziert (siehe Determinanten), wobei rechts herum positiv und links herum negativ gerechnet wird.

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

- Binäre Operation: $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n$
- antikommutativ $a \times b = -b \times a$
- assoziativ $\beta \cdot (a \times b) = \beta \cdot a \times b = a \times \beta \cdot b$
- distributiv $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 3 - 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

LÄNGE / WINKEL VON VEKTOREN

Da es sich bei einem Vektor um ein n-dimensionales Objekt handelt, kann der erreichte Punkt entweder mittels Koordinaten oder via Länge und Winkel dargestellt werden.

➤ Länge: $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\theta(a, a)}$

Normierter Vektor: $a^0 = \frac{1}{|a|} \cdot a$ (Länge ist Eins)

Abstand $D(a, b)$: $|a - b| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$

➤ Winkel: $\theta(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n = \sqrt{\theta(a, a)} \cdot \sqrt{\theta(b, b)} \cdot \cos \alpha$

Cauchy-Schwarze Ungleichung $\alpha = \arccos \frac{\theta(a, b)}{|a| \cdot |b|} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\theta(a, b)}{|a| \cdot |b|} \leq 1$

Orthogonalitätskriterium: $\cos(90^\circ) = 0 \Rightarrow \theta(a, b) = 0 \wedge (|a| \neq 0 \wedge |b| \neq 0)$

AUFGABEN

- 1) Berechnen Sie das innere Produkt der folgenden Vektoren, bestimmen Sie den Winkel sowie den Abstand zwischen den Vektoren und geben den normierten Vektor an.

$$\text{a) } a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } e = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- 2) Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate so, dass die jeweiligen Vektoren senkrecht aufeinander stehen und berechnen anschließend deren Abstände.

$$\text{a) } a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ x \\ -3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ y \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } a = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ x \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ 4x \\ -x \end{pmatrix}$$

LINEARE (UN)ABHÄNGIGKEIT

Grundlage der (Un)Abhängigkeit von Vektoren ist dessen **Linearkombination**, d.h. es wird jeder Vektor mit einem beliebigen **Skalar** multipliziert und anschließend die Summe gebildet.

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \dots + \zeta \cdot z$$

Im Fall der (Un)Abhängigkeits-Prüfung untersucht man, ob einer der Vektoren mittels einer Linearkombination der übrigen darstellbar ist, d.h. man bildet die Linearkombination der Vektoren und setzt diese Kombination gleich Null.

$$\alpha \cdot a = \beta \cdot b + \dots + \zeta \cdot z \Leftrightarrow \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \dots + \zeta \cdot z = 0$$

Existiert nur die sogenannte **Trivialsösung** der Form $\alpha = \beta = \dots = \zeta = 0$, dann sind die Vektoren **linear unabhängig**. Sollte eine der entstehenden Lösungen $\neq 0$ sein, dann sind sie **linear abhängig**.

Beispiel: $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \\ \gamma = -2 \end{matrix}$

BASIS / SPAN

In einer **Basis** sind Objekte/ Vektoren enthalten, die einen zugehörigen **n-dimensionalen** Raum komplett aufspannen können.

Demzufolge besteht der Euklidische Vektorraum \mathfrak{R}^3 aus den 3 **Koordinaten-Einheits-Vektoren**:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{linear unabhängig} \\ \text{normiert (Länge 1)} \\ \text{orthogonal} \end{array} \left. \vphantom{\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}} \right\} \text{Orthonormalsystem}$$

Grundvoraussetzung ist die lineare Unabhängigkeit, d.h. eine begrenzte Anzahl von linear unabhängiger Vektoren bilden eine Basis, wobei die Anzahl der enthaltenen Vektoren die Dimension des Raums angibt.

Die Dimension ist unabhängig von der Anzahl der Komponenten/ Koordinaten eines Vektors.

Beispiel: Die drei Vektoren (letztes Beispiel) sind linear unabhängig und bilden demzufolge auch eine Basis. Da es sich um drei Basisvektoren handelt, spannen Sie einen Raum der 3. Dimension auf.

LÖSUNGSMETHODIK

Frage: Bilden die gegebenen Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3 ?

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c = 0$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = 0 \\ 3\alpha & +1\beta & +1\gamma & = 0 \\ -2\alpha & -3\beta & +5\gamma & = 0 \end{array} \right| \cdot (-3) \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|c} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = 0 \\ 3\alpha & +1\beta & +1\gamma & = 0 \\ -2\alpha & -3\beta & +5\gamma & = 0 \end{array}} \right\} + \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|c} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = 0 \\ 3\alpha & +1\beta & +1\gamma & = 0 \\ -2\alpha & -3\beta & +5\gamma & = 0 \end{array}} \right\} \cdot 2 \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|c} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = 0 \\ 3\alpha & +1\beta & +1\gamma & = 0 \\ -2\alpha & -3\beta & +5\gamma & = 0 \end{array}} \right\} + \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = 0 \\ 0 & -5\beta & +10\gamma & = 0 \\ 0 & +1\beta & -1\gamma & = 0 \end{array} \right| \cdot 5 \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|c} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = 0 \\ 0 & -5\beta & +10\gamma & = 0 \\ 0 & +1\beta & -1\gamma & = 0 \end{array}} \right\} +$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1\alpha & +2\beta & -3\gamma & = 0 \\ 0 & +1\beta & -1\gamma & = 0 \\ 0 & 0 & +5\gamma & = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \text{Trivillösung: Die Vektoren sind linear unabhängig.}$$

Es handelt sich somit um eine Basis $B = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right); \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right); \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \right)$ mit der Dimension 3.

Somit kann durch diese Basis der \mathbb{R}^3 aufgespannt werden.

AUFGABEN

1) Sind die folgenden 3 Vektoren a, b, c linear unabhängig?

Stellen Sie den Vektor d als Linearkombination von a, b, c dar.

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2) Prüfen Sie, ob die gegebenen Vektoren eine Basis bilden und geben die maximal mögliche Dimension mit dem zugehörigen Raum an.

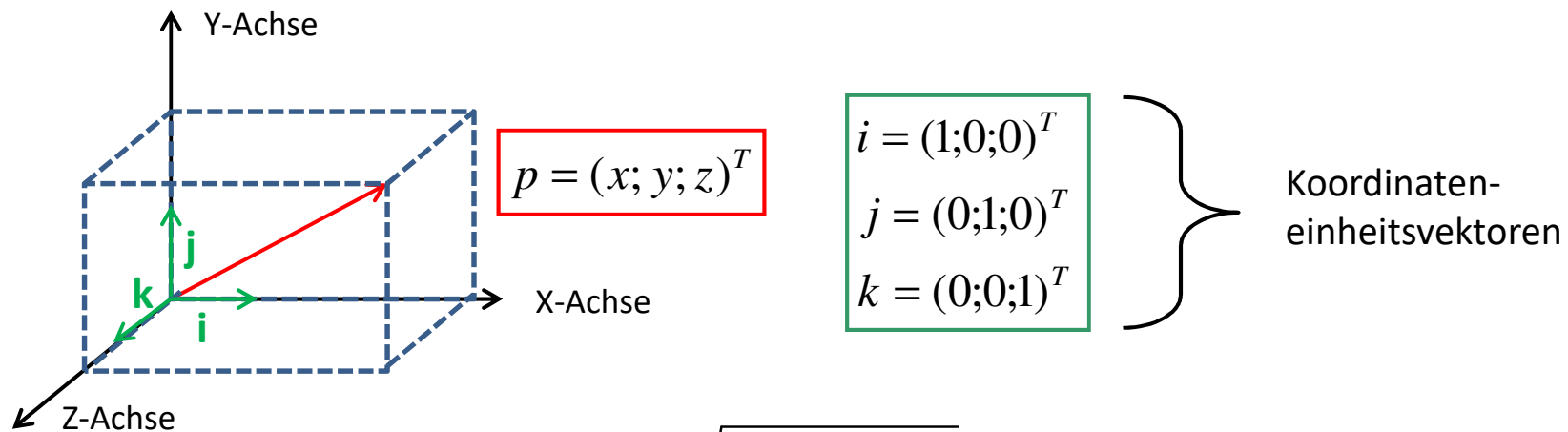
$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3) Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass das Vektorsystem (v_1, v_2, v_3) mit $v_1 = (1, \alpha, -1)^T$, $v_2 = (2, 1, 0)^T$ und $v_3 = (-3, -\beta, 1)^T$ linear unabhängig ist.

EUKLIDISCHER VEKTORRAUM

Als Grundlage für Geraden- und Ebenenberechnung im 3-dimensionalen Raum dient der Euklidische Vektorraum $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

Die Vektoren können nicht nur senkrecht, sondern auch in der waagerechten der sogenannten **transponierten** Form $(x; y; z)^T$ dargestellt werden.



Betrag: $|p| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Winkel: $\cos(i, p) = \frac{x}{r}; \cos(j, p) = \frac{y}{r}; \cos(k, p) = \frac{z}{r}$

VEKTORENKLASSEN

Für die Vektorrechnung im Bereich von Geraden, Ebenen und Körper ist es wichtig die beiden möglichen Arten von Vektoren zu unterscheiden.

- ✓ Ortsvektor: Stellt die direkte Verbindung vom Ursprung zu einem beliebigen Punkt im Raum dar.

$$a = \overline{OA}$$

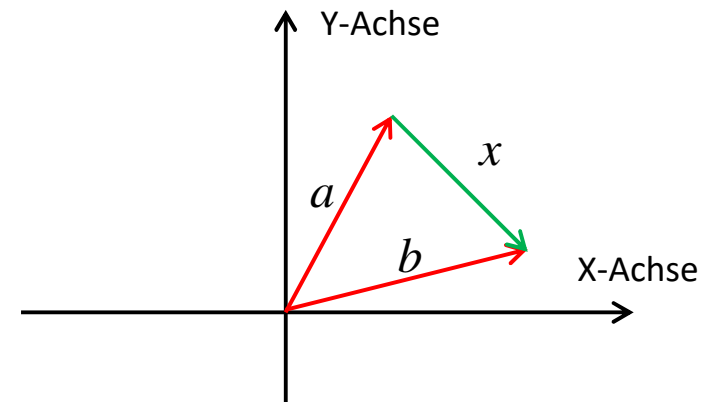
- ✓ Richtungsvektor: Werden zwei beliebige Punkte im Raum verbunden, so erhält man den Richtungsvektor, der sich stets aus der Differenz zwischen Endpunkt und Anfangspunkt berechnet.

$$\overline{AB} = b - a$$

Beispiel:

✓ Ortsvektor: $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

✓ Richtungsvektor: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$



GERADENGLICHUNG

Eine Gerade ist die graphische Darstellung einer linearen Gleichung bestehend aus **Steigung** und **Startpunkt** bzw. Achsenabschnitt und wird in folgenden zwei Arten dargestellt.

✓ Parameterfreie Form: $y = m \cdot x + b$
b=Achsenabschnitt; m = Steigung

✓ Parameterform: $x = a + \alpha \cdot \overline{AB}$
a = Ortsvektor (Startpunkt); \overline{AB} = Richtungsvektor

Beispiel:

✓ Parameterfreie Form:
$$\left. \begin{array}{l} A = (3;5) \\ B = (2;7) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-5}{2-3} = -2 \\ b = y - m \cdot x = 7 - (-2) \cdot 2 = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow y = -2 \cdot x + 11$$

✓ Parameterform:
$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} (-1)-2 \\ 2-1 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN ZU GERADEN

1) Berechnen Sie das äußere Produkt der folgenden Vektoren.

a) $a = (2; -1; 3)^T; b = (-1; 2; 5)^T$ b) $c = (-2; 4; 1)^T; b = (5; 3; 1)^T$

2) Berechnen Sie sowohl die parameterfreie als auch die Parameterform der Gerade durch die folgenden Punkte und fertigen Sie eine Skizze an.

a) $A = (2; 5); B = (-2; 3)$ b) $A = (-1; 3); B = (2; -6)$

3) Geben Sie die Parameterform der Geraden durch folgende Punkte an.

a) $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $a = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

4) Prüfen Sie, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

a) $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

LAGERELATION VON GERADEN I

Im Euklidischen Vektorraum \mathcal{R}^3 handelt es sich um einen **3-dimensionalen Raum**, der durch die 3 Koordinateneinheitsvektoren als **Basis** definiert ist.

Da eine Gerade nur ein 2-dimensionales Objekt ist, existieren insgesamt vier mögliche Lagerrelationen:

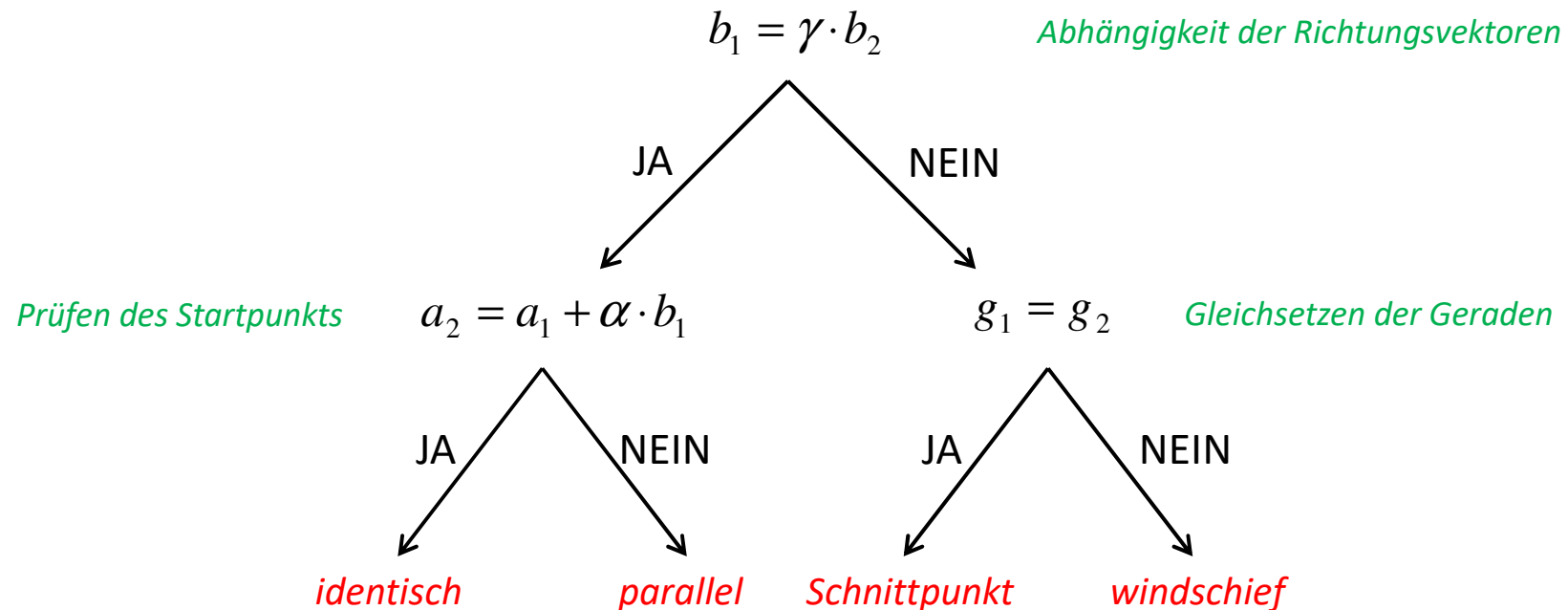
$$\text{Gerade} = \text{Startpunkt} + \text{Parameter} * \text{Richtungsvektor}$$

- ✓ parallel: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **nicht auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ identisch: **linear abhängige** Richtungsvektoren, wobei der Startpunkt der ersten Gerade **auf** der zweiten Geraden liegt.
- ✓ schneiden sich: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich eine **eindeutige Lösung** für die Parameter.
- ✓ windschief: **linear unabhängige** Richtungsvektoren. Beim Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt sich ein **Widerspruch** für die Parameter.

LAGERELATION VON GERADEN II

Aufgrund der definierten Lagerrelationen ergibt sich der folgende Entscheidungsbaum:

$$g_1 : x_1 = a_1 + \alpha \cdot b_1 \quad g_2 : x_2 = a_2 + \beta \cdot b_2$$



LAGERELATION VON GERADEN III

Beispiel: $g_1 : x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $g_2 : x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. *Abhängigkeit der Richtungsvektoren:* $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma = 3 \\ \gamma = 1 \\ \gamma = -4 \end{matrix}$

2. *Gleichsetzen der Geraden:* $g_1 = g_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ -2\alpha & 2\beta & = & -2 \\ -4\alpha & -1\beta & = & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} | \cdot 2 \\ | \cdot (-1) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{vmatrix} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ -2\alpha & 2\beta & = & -2 \\ -4\alpha & -1\beta & = & 6 \end{vmatrix}} \right\}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3\alpha & -1\beta & = & -3 \\ 4\alpha & 0 & = & -8 \\ -7\alpha & 0 & = & 9 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \alpha = -2 \wedge \alpha = -\frac{9}{7}$$

Aufgrund des Widerspruchs müssen die beiden Geraden windschief zueinander liegen.

AUFGABEN

1) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

$$\text{a) } g_1 : x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \quad g_2 : x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g_1 : x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad g_2 : x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

2) Bestimmen Sie die Parameterform der Geraden und geben deren Lage zueinander an.

$$\text{a) } g_1 : a = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g_2 : c = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; d = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g_1 : a = (2; -2; 5)^T; b = (-1; 1; 3)^T \quad g_2 : c = (-1; 3; 2)^T; d = (3; -2; 5)^T$$

AUFGABEN

1) Wie liegen die folgenden Geraden zueinander?

$$\text{a) } g_1 : x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad g_2 : x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } g_1 : x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad g_2 : x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

2) Prüfen Sie, ob die folgenden 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

$$\text{a) } a = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; z = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

JIPIEHHH, ES IST GESCHAFFT!!!!

