# MATHEMATIK

## 30.06.2017

# Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was können Sie durch die Art des Logarithmus erkennen?
- ✓ Worin liegt der Unterschied zwischen LN und LD?
- ✓ Wie lautet der Definitionsbereich von Log(x-1)?
- ✓ Aus welchen 3 Schritten besteht das Lösen von Log-Ausdrücken?
- ✓ Durch welchen Punkt verläuft jede Exponentialfunktion (Warum)?
- ✓ Wie kann man eine Ln-Funktion an beiden Achsen spiegeln?
- ✓ Worin besteht der Unterschied zwischen Ergebnis und Lösung?
- ✓ Wie verläuft die ln(x)-Funktion im Vergleich zu Log(x)?
- ✓ Welchen Einfluss hat die Basis auf eine Exponentialfunktion?
- ✓ Was bewirkt das Addieren einer Konstanten zu einer Funktion?

# AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $3 \cdot \log(x-y) + \log(x+y) - \frac{1}{2}\log(x-y)^4$

3) $\log \sqrt[5]{\frac{x^3 \cdot y^2}{3 \cdot (x+y^2)}}$

2) $2\ln 2x - 3\ln 2 + 4\ln\sqrt{x} + 2\ln\frac{4}{x^2}$

4) $\ln\left(\frac{2 \cdot \sqrt{a-2b}}{c^2 \cdot \sqrt[4]{d}}\right)^3$

5) $16^{ld\sqrt{3}} + 1.000^{\log 3} - \sqrt[4]{e}^{\,2\ln 25} - 2\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2 - \log\frac{1}{100} + 3ld\frac{1}{8}$

6) $\left(e^4\right)^{\ln 2} + 0{,}1ld1024 - \log\sqrt{10.000} + 0{,}01^{\log\frac{1}{3}} - \left(\frac{2}{16}\right)^{-ld3} + 6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

# AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $\frac{1}{4}\cdot\log(256x^8)-2\log\frac{\sqrt{9}}{x^2}-0{,}5\cdot\log\frac{x^4}{9}=1{,}5\cdot\log(9x^4)+3\cdot\log\frac{1}{2x^3}+4\cdot\log\sqrt{27\cdot x}$

2) $6\cdot\ln\sqrt[3]{3}-4\cdot\left(\ln\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{x}}+\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{9}{x}\right)=2\cdot\ln\frac{\sqrt{x^3}}{3}-0{,}25\cdot\ln(16x^8)+3\cdot\ln\frac{8}{x^2}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x)=-\frac{1}{3}\cdot\ln\left(x^2-6\cdot x-40\right)$

4) $g(x)=\log\left(\sqrt{2x+4}-8\right)-12$

5) $h(x)=\frac{3\cdot x}{\ln\left(15-3\cdot x\right)}$

# TRIGONOMETRIE I

Für die Sinus/ Cosinus-Funktion sind im Bereich der **Addition der Argumente** zwei **Additionstheoreme** definiert, wodurch stets bei **rechtwinkliger Konstellation** entweder ein Sinus oder ein Cosinus aus der Funktion **entfernt** werden kann.

1) $\boxed{\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \sin(b) \cdot \cos(a)}$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2x)$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(2x) = \cos(2x)$$

90° Phasenverschiebung
der Sinusfunktion = Cosinusfunktion

2) $\boxed{\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \quad \sin(a) \cdot \sin(b)}$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = \cos(\frac{3}{2}\pi) \cdot \cos(3x) + \sin(\frac{3}{2}\pi) \cdot \sin(3x)$$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = 0 \cdot \cos(3x) + (-1) \cdot \sin(3x) = -\sin(3x)$$

270° Phasenverschiebung
der Cosinusfunktion = -Sinusfunktion

# AUFGABEN

I. Geben Sie Schätzungen für die folgenden Werte an.

$$a)\sin(300°) \qquad b)\cos(60°) \qquad c)\cos(400°) \qquad d)\sin(800°)$$

II. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit als möglich.

$$a)\sin(4x-\frac{3}{2}\pi) \qquad b)\cos(-\frac{1}{2}\pi+2x) \qquad c)\cos(\frac{3}{2}\cdot(2x+3\pi)$$

III. Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang.

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos(x)\right)$$

# AUFGABEN

I. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit als möglich.

$$a)\sin(2x-9\pi)$$

$$b)\sin(2{,}5x-7{,}5\pi)$$

$$c)\cos(12\cdot(4x-5\pi)$$

$$d)\cos(\frac{1}{2}\cdot\left(7\pi+6x\right)-3{,}5\pi)$$

# TRIGONOMETRIE II

Eine rein trigonometrische Funktion (**sinus/ cosinus**) stellt eine **Schwingung** innerhalb einer bestimmbaren **Periode** und eines konstanten Wertebereichs dar, die für alle reellen Zahlen definiert ist.

$$\boxed{f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d}$$

Die vier Parameter in der Funktion beziehen sich zum einen auf die **Verschiebung** und zum anderen auf die **Streckung/ Stauchung** in der x-Achsen bzw. y-Achsen-Richtung:

| | | |
|---|---|---|
| a: | Amplitudenfaktor | Streckung/Stauchung in y-Achsen-Richtung |
| b: | Periodenfaktor | Streckung/Stauchung in x-Achsen-Richtung |
| c: | Phasenverschiebung | Verschiebung in x-Achsen-Richtung |
| d: | Wertebereichverschiebung | Verschiebung in y-Achsen-Richtung |

Symmetrie:

- SIN: Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x) \Rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$
- COS: Achsensymmetrie $f(x) = f(-x) \Rightarrow \cos(x) = \cos(-x)$

Bei dem Periodenfaktor gilt für die **neue Periode**: $\boxed{P_{NEU} = \frac{P_{ALT}}{b}}$

# TRIGONOMETRIE III

Anhand der folgenden Vierfeldertafel können die grundlegenden Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion direkt abgelesen werden.

Es wird dabei davon ausgegangen, dass es sich um eine Standardfunktion in der Form $sin^n\big(g(x)\big)$ oder $cos^n\big(h(x)\big)$ handelt.

**Vierfeldertafel**

| | $\boldsymbol{n = gerade}$ | $\boldsymbol{n = ungerade}$ |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{sin^n\big(g(x)\big)}$ | $Periode_{ALT} = \pi$<br>$f(x) = f(-x)$<br>$\mathbb{W} = [0;1]$ | $Periode_{ALT} = 2\pi$<br>$f(x) = -f(-x)$<br>$\mathbb{W} = [-1;1]$ |
| $\boldsymbol{cos^n\big(h(x)\big)}$ | $Periode_{ALT} = \pi$<br>$f(x) = f(-x)$<br>$\mathbb{W} = [0;1]$ | $Periode_{ALT} = 2\pi$<br>$f(x) = f(-x)$<br>$\mathbb{W} = [-1;1]$ |

# TRIGONOMETRIE IV

**Beispiel**: $f(x) = 3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 3\pi) + 4$

*Vereinfachung*: $f(x) = 3 \cdot \left[ \sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(3\pi) + \sin(3\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4$

$$f(x) = (-3) \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

*Wertebereich*: $-3 \cdot [-1;1] + 4 = [-3;3] + 4 \Longrightarrow W = y \in [1;7]$

*Periode*: $P_{NEU} = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi \Rightarrow f(x) = f(x + 3\pi)$

$$f(x) = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x + 3\pi)) + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 2\pi) + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[ \sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[ \sin(\frac{2}{3}x) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

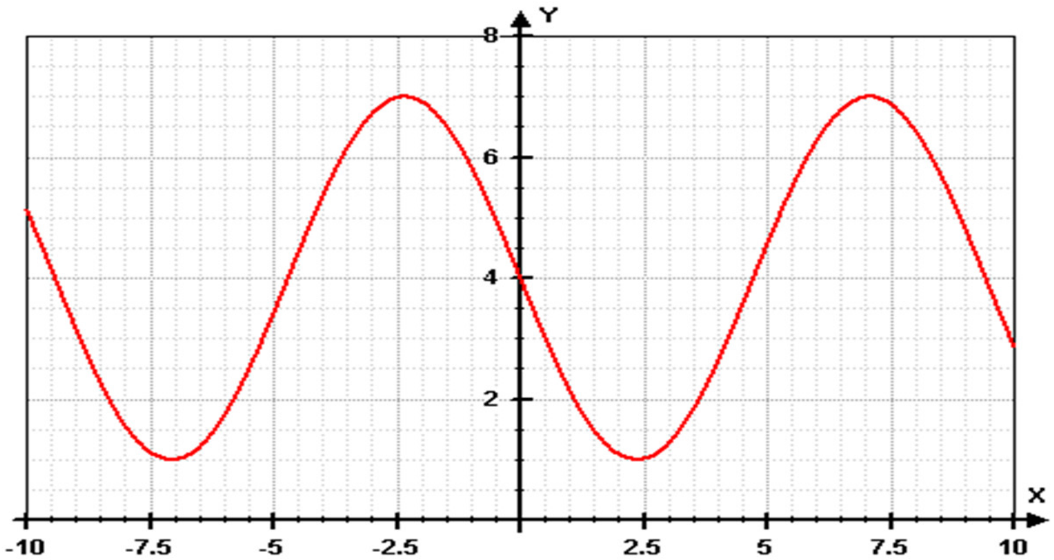
# TRIGONOMETRIE V

**Beispiel**: $f(x) = (-3) \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$

*Symmetrie*: Punktsymmetrie $f(x) - 4 = -\left[f(-x) - 4\right]$

$$\left.\begin{aligned} f(x) - 4 &= -3 \cdot \sin(\tfrac{2}{3}x) + 4 - 4 = -3 \cdot \sin(\tfrac{2}{3}x) \\ -\left[f(-x) - 4\right] &= -\left[-3 \cdot \sin(-\tfrac{2}{3}x) + 4 - 4\right] = 3 \cdot \sin(-\tfrac{2}{3}x) \end{aligned}\right\} =$$

*Skizze*:



# AUFGABEN

Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten und fertigen Sie eine Skizze an.

1) $$f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(4x - 5\pi)$$

2) $$g(x) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\pi\right) + 5$$

3) $$h(x) = 3 \cdot \left[\cos(2x - \pi) + 2\right]$$

4) $$k(x) = 5 + \frac{2}{3} \cdot \cos^4\left(\frac{1}{2} \cdot (\pi - x)\right)$$

# AUFGABEN

Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten und beweisen Sie die Periode.

1) $f(x) = 2 - 0{,}5 \cdot \sin(3x - 5{,}5\pi)$

2) $g(x) = -4 \cdot \cos(2{,}5x - 12{,}5\pi) + 8$

3) $h(x) = 2 \cdot [\cos(4x - 2\pi) + 5] - 3$

4) $k(x) = 4 + \frac{1}{4} \cdot \left( \sin(\frac{7}{2} \cdot (\pi - 2x)) - 8 \right)$

# Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?