MATHEMATIK

22.06.2018

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was bedeutet ein negativer Exponent?
- ✓ Wie kann man den Grad einer Wurzel noch darstellen?
- ✓ Wie werden Potenzen potenziert?
- ✓ Was bewirkt eine Null im Exponenten?
- ✓ Wann kann man Potenzen addieren / subtrahieren?
- ✓ Wie lösen Sie verschachtelte Wurzelausdrücke?
- ✓ Was verstehen Sie unter der Hierarchie der Mathematik?
- ✓ Was ist ein Polynom vom Grade n?
- ✓ Was bedeutet der Begriff Gegenoperation?
- ✓ Wie Lösen Sie eine Gleichung mit einem höheren Operator?
- ✓ Wann sprechen Sie von einer Funktion?
- ✓ Auf welcher Achse wird der Wertebereich abgetragen?
- ✓ Was ist eine Hyperbel und welche Varianten gibt es?

DEFINITION EINES LOGARITHMUS

Der Logarithmus dient zur Berechnung eines variablen Ausdrucks im Exponenten.

Es gilt: $$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a}}$$

<u>10er-Logarithmus:</u>
Ein Logarithmus ohne Angabe einer Basis ist immer zur Basis 10. $\log x = \log_{10} x$

Beispiel: $\log 10.000 = \log_{10} 10^4 = 4$

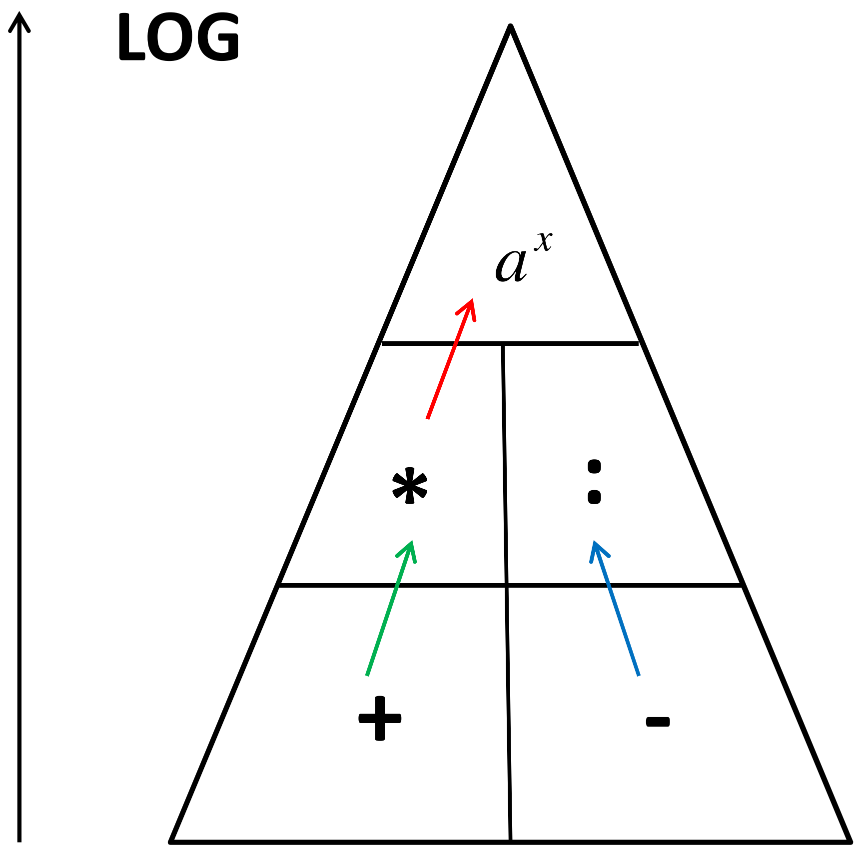
<u>Logarithmus naturalis:</u>
Der Logarithmus zur Basis *e* ist der natürliche Logarithmus. $\ln x = \log_e x$

Beispiel: $\ln 42 = \log_e 42 = 3{,}737$

<u>Logarithmus dualis:</u>
Ein Logarithmus zur Basis 2 nennt man dualis. $ld(x) = \log_2 x$

Beispiel: $ld(32) = \log_2 2^5 = 5$

LOGARITHMUS-GESETZE



$$\boxed{3 \cdot \log 4 = \log 4^3 = \log 64}$$

$$\boxed{\log 2 + \log 3 = \log 2 \cdot 3 = \log 6}$$

$$\boxed{\log 8 - \log 2 = \log \frac{8}{2} = \log 4}$$

OPERATION UND GEGENOPERATION

Die zu einem Logarithmusausdruck zugehörige Gegenoperation ist stets ein Exponentialoperator, wodurch sich beide neutralisieren.
Die Zusammenhänge ergeben sich wie folgt:

$$\boxed{\log 10^{\Psi} = 10^{\log \Psi} = \Psi} \quad \boxed{\ln e^{\Omega} = e^{\ln \Omega} = \Omega} \quad \boxed{ld\, 2^{\Theta} = 2^{ld\Theta} = \Theta}$$

Aufgrund dieser Vereinfachungen, muss die zugehörige Basis bzw. der Exponent im ersten Schritt mittels exponentieller/ logarithmischer Gesetze passend umgeformt werden.

Beispiel:

$$\log \frac{1}{1000} - 4 \cdot \ln \sqrt{e} + \frac{1}{2} \cdot ld 16 + 0{,}1^{\log 0{,}25} + \left(\frac{1}{e^2}\right)^{\ln \frac{1}{3}} - 8^{ld 3}$$

$$\log 10^{-3} - 4 \cdot \ln e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot ld\, 2^4 + 10^{(-1)\cdot \log \frac{1}{4}} + e^{(-2)\cdot \ln \frac{1}{3}} - 2^{3 \cdot ld 3}$$

$$-3 - 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 3^3 = -3 - 2 + 2 + 4 + 9 - 27 = -17$$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $\log\frac{1}{100}-\sqrt{e}^{\ln 4}+4^{ld\,3}-2ld\,0{,}25$

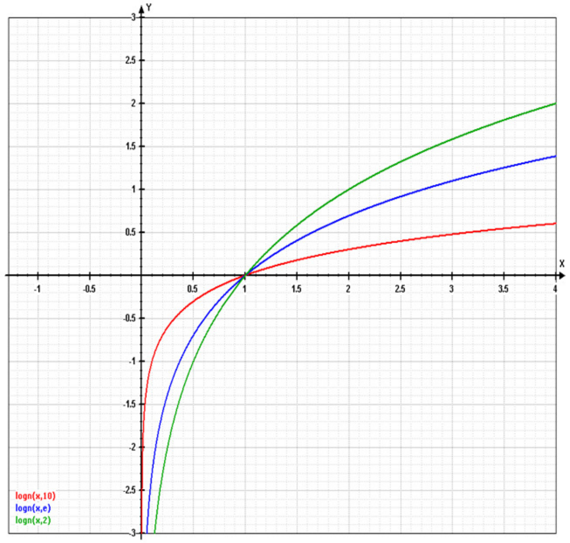
2) $100^{\log 3}-\ln\frac{1}{e^2}+0{,}5ld\,16-e^{-3\ln\frac{1}{2}}$

3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{ld\,2}-6\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}}+\frac{1}{4}ld\,64-\frac{1}{2}\log\frac{1}{1000}+\sqrt[3]{e}^{\ln 27}$

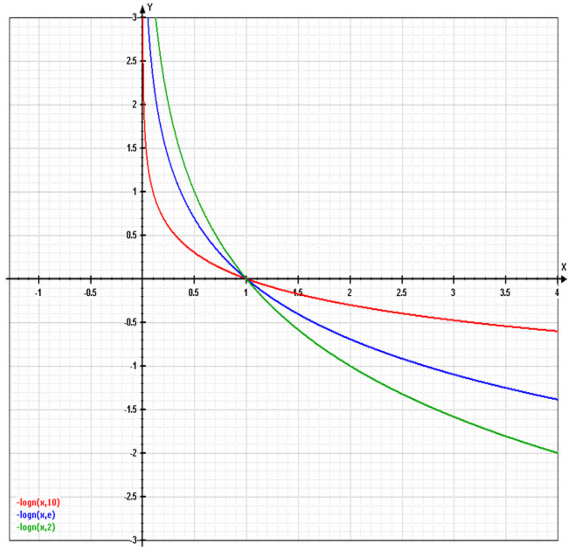
4) $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\ln\frac{1}{9}}+100^{\log\frac{1}{2^{-2}}}-16^{\frac{1}{2}ld\,4}+2\log 0{,}001-3\ln\frac{1}{e^3}+\frac{1}{4}ld\,\frac{1}{256}$

FUNKTIONSGRAPHEN

Positiver Logarithmus:



Negativer Logarithmus:



- Ausschließlich positive Steigung
- Ausschließlich negative Steigung

- Gemeinsamer Punkt: (1/0)
- Je größer die Basis, desto flacher ab x=1
- Je größer die Basis, desto steiler vor x=1

DEFINITIONS-/ WERTEBEREICH

<u>Definitionsbereich:</u>
Wie man schon durch die Funktionsgraphen erkennen kann, darf man einen Logarithmus nur von positiven Zahlen ziehen.

$D=\{x\in\Re \mid x>0\}=\Re^{+}$, da $10^{x}>0 \Leftrightarrow \log(>0)=x$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l}\ln\left(x^2-5x+6\right)=y\\ \left(x^2-5x+6\right)=(x-3)\cdot(x-2)>0\end{array}\right\} \quad D=\{x\in\Re \mid x>3\vee x<2\}$$

<u>Wertebereich:</u>
Aufgrund der Funktionsgraphen ist ersichtlich, dass ein Logarithmus alle reellen Werte annehmen kann.

$W=y\in\Re$, da $10^{(>0)}>1\wedge 10^{(\le 0)}\le 1$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l}12-3\cdot\ln(5x-3)=y\\ 12-3\cdot\left]-\infty;\infty\right[\Rightarrow\Re\end{array}\right\} \quad W=y\in\Re$$

DIE LOGARITHMEN-GLEICHUNG

Sofern eine reine Logarithmengleichung existiert kann man diese mit der folgenden Methodik lösen, wobei primäres Ziel eine Isolierung des Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung ist:

<u>Methodik:</u>

1. Die Faktoren vor dem Logarithmus in den Exponenten verschieben.
2. Alle positiven Terme über den Bruchstrich, alle negativen darunter schreiben.
3. Streichen der Logarithmen auf beiden Seiten.
4. Lösen der Gleichung.

Beispiel: $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log 2 - \frac{1}{2} \cdot \log x^4 = 2 \cdot \log 4 - \log(x-2)$

$$\log x^2 - \log 2^3 - \log\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}} = \log 4^2 - \log(x-2)$$

$$\log \frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \log \frac{16}{x-2}$$

$$\frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \frac{16}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 = 16 \cdot 8 = 128 \Leftrightarrow x = 130$$

AUFGABEN ZU LOGARITHMUS

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $3\cdot\log x-4\cdot\log\frac{2}{x}-\frac{1}{3}\cdot\log\left(x^2\right)^6=\frac{2}{3}\cdot\log 27+\frac{1}{2}\cdot\log x^4-2\cdot\log 6$

2) $3\cdot\ln 4-0{,}5\cdot\ln\frac{16}{x^4}+2\cdot\ln 8=1{,}5\cdot\ln x^4-8\cdot\ln\sqrt[4]{\frac{1}{x}}-2\cdot\ln\frac{1}{4}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x)=\frac{2}{5}\cdot\ln\left(4x-3-x^2\right)$ 4) $g(x)=42+\log\left(2-\sqrt{x-2}\right)$ 5) $h(x)=\frac{42}{ld\left(3\cdot x+6\right)}$

III. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $\log\frac{1}{1000}-4\ln\sqrt{e}+16^{ld\sqrt{3}}+2e^{2\cdot\ln 3}-\left(10^{\log 12}+2ld4\right)$

2) $6\cdot\log\sqrt[3]{10}+4^{ld3}-2\cdot\ln\frac{1}{e^2}-0{,}2\cdot ld\left(32^5\right)+\left(\frac{1}{100}\right)^{\log\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{e}\right)^{\ln\left(5^4\right)}$

TRIGONOMETRIE I

Für die Sinus/ Cosinus-Funktion sind im Bereich der **Addition der Argumente** zwei **Additionstheoreme** definiert, wodurch stets bei **rechtwinkliger Konstellation** entweder ein Sinus oder ein Cosinus aus der Funktion **entfernt** werden kann.

1) $$\boxed{\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \sin(b) \cdot \cos(a)}$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2x)$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = \sin(2x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(2x) = \cos(2x)$$

90° Phasenverschiebung
der Sinusfunktion = Cosinusfunktion

2) $$\boxed{\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)}$$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = \cos(\frac{3}{2}\pi) \cdot \cos(3x) + \sin(\frac{3}{2}\pi) \cdot \sin(3x)$$

$$\cos(\frac{3}{2}\pi - 3x) = 0 \cdot \cos(3x) + (-1) \cdot \sin(3x) = -\sin(3x)$$

270° Phasenverschiebung
der Cosinusfunktion = -Sinusfunktion

AUFGABEN

I. Geben Sie Schätzungen für die folgenden Werte an.

$$a)\sin(300°) \qquad b)\cos(60°) \qquad c)\cos(400°) \qquad d)\sin(800°)$$

II. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit als möglich.

$$a)\sin(4x-\frac{3}{2}\pi) \qquad b)\cos(-\frac{1}{2}\pi+2x) \qquad c)\cos(\frac{3}{2}\cdot(2x+3\pi)$$

III. Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang.

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\cos(x)\right)$$

AUFGABEN

I. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit als möglich.

$$a)\sin(2x-9\pi)$$

$$b)\sin(2{,}5x-7{,}5\pi)$$

$$c)\cos(12\cdot(4x-5\pi)$$

$$d)\cos(\frac{1}{2}\cdot\left(7\pi+6x\right)-3{,}5\pi)$$

TRIGONOMETRIE II

Eine rein trigonometrische Funktion (**sinus/ cosinus**) stellt eine **Schwingung** innerhalb einer bestimmbaren **Periode** und eines konstanten Wertebereichs dar, die für alle reellen Zahlen definiert ist.

$$\boxed{f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d}$$

Die vier Parameter in der Funktion beziehen sich zum einen auf die **Verschiebung** und zum anderen auf die **Streckung/ Stauchung** in der x-Achsen bzw. y-Achsen-Richtung:

a:	Amplitudenfaktor	Streckung/Stauchung in y-Achsen-Richtung
b:	Periodenfaktor	Streckung/Stauchung in x-Achsen-Richtung
c:	Phasenverschiebung	Verschiebung in x-Achsen-Richtung
d:	Wertebereichverschiebung	Verschiebung in y-Achsen-Richtung

Symmetrie:

- SIN: Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x) \Rightarrow \sin(-x) = -\sin(x)$
- COS: Achsensymmetrie $f(x) = f(-x) \Rightarrow \cos(x) = \cos(-x)$

Bei dem Periodenfaktor gilt für die **neue Periode**: $\boxed{P_{NEU} = \frac{P_{ALT}}{b}}$

TRIGONOMETRIE III

Anhand der folgenden Vierfeldertafel können die grundlegenden Eigenschaften einer trigonometrischen Funktion direkt abgelesen werden.

Es wird dabei davon ausgegangen, dass es sich um eine Standardfunktion in der Form $sin^n(g(x))$ oder $cos^n(h(x))$ handelt.

Vierfeldertafel

	$\boldsymbol{n = gerade}$	$\boldsymbol{n = ungerade}$
$\boldsymbol{sin^n(g(x))}$	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = -f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
$\boldsymbol{cos^n(h(x))}$	$Periode_{ALT} = \pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [0; 1]$	$Periode_{ALT} = 2\pi$ $f(x) = f(-x)$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$

TRIGONOMETRIE IV

Beispiel: $$f(x) = 3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 3\pi) + 4$$

Vereinfachung: $$f(x) = 3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(3\pi) + \sin(3\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4$$

$$f(x) = (-3) \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

Wertebereich: $$-3 \cdot [-1;1] + 4 = [-3;3] + 4 \Longrightarrow W = y \in [1;7]$$

Periode: $$P_{NEU} = \frac{2\pi}{2/3} = 3\pi \Rightarrow f(x) = f(x + 3\pi)$$

$$f(x) = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}(x + 3\pi)) + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + 2\pi) + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4$$

$$f(x) = -3 \cdot \left[\sin(\frac{2}{3}x) \cdot 1 + 0 \cdot \cos(\frac{2}{3}x) \right] + 4 = -3 \cdot \sin(\frac{2}{3}x) + 4$$

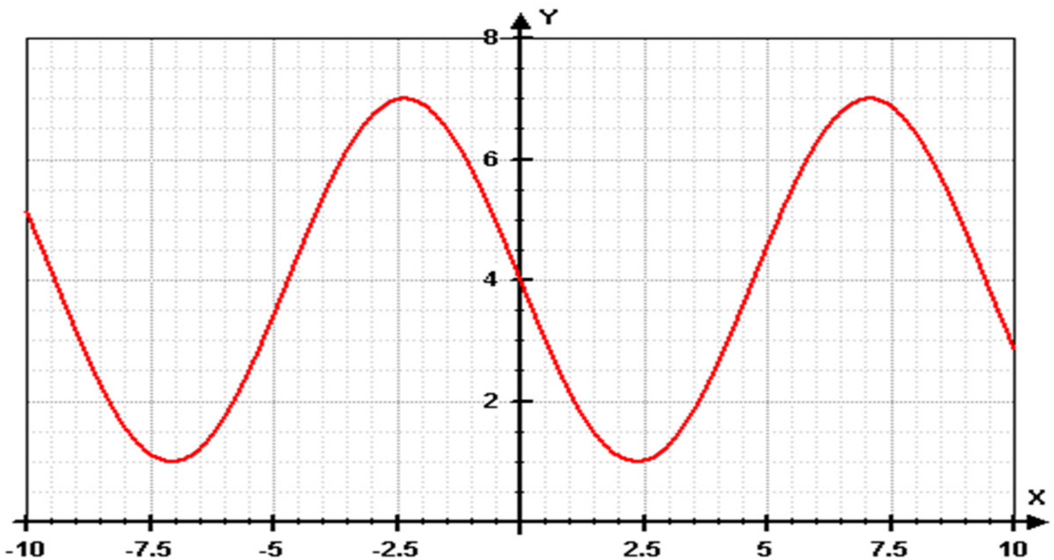
TRIGONOMETRIE V

Beispiel: $f(x) = (-3)\cdot\sin(\frac{2}{3}x) + 4$

Symmetrie: Punktsymmetrie $f(x) - 4 = -[f(-x) - 4]$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - 4 = -3\cdot\sin(\frac{2}{3}x) + 4 - 4 = -3\cdot\sin(\frac{2}{3}x) \\ -[f(-x) - 4] = -\left[-3\cdot\sin(-\frac{2}{3}x) + 4 - 4\right] = 3\cdot\sin(-\frac{2}{3}x) \end{array}\right\} =$$

Skizze:



AUFGABEN

Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten und fertigen Sie eine Skizze an.

1) $f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(4x - 5\pi)$

2) $g(x) = 2 \cdot \sin^2(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\pi) + 5$

3) $h(x) = 3 \cdot [\cos(2x - \pi) + 2]$

4) $k(x) = 5 + \frac{2}{3} \cdot \cos^4(\frac{1}{2} \cdot (\pi - x))$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?