

# MATHEMATIK

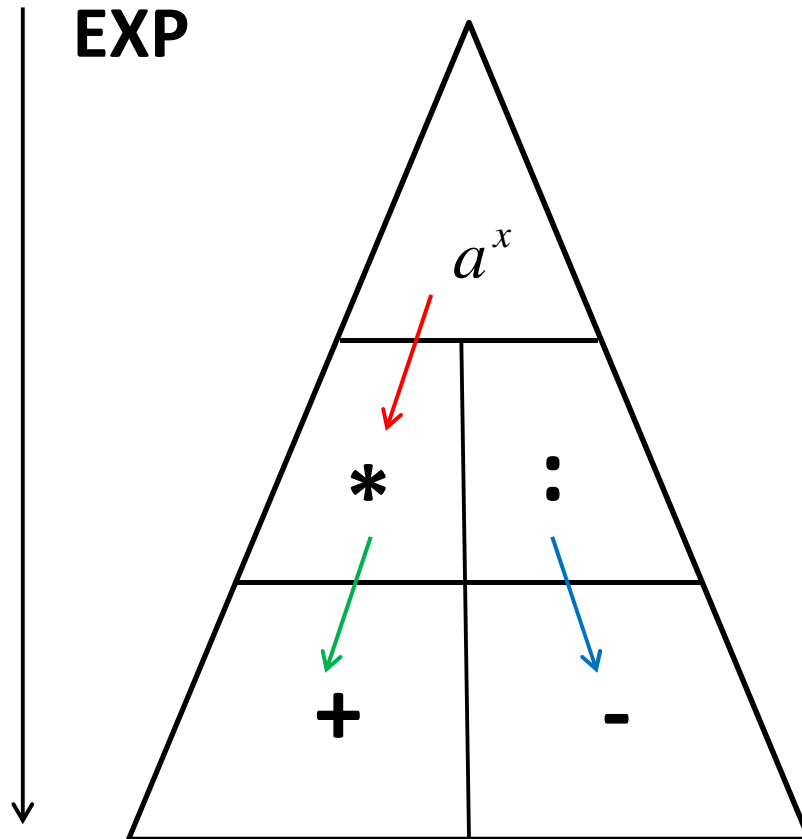
**09.06.2017**

# Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was bedeutet das Störprinzip in der Arithmetik?
- ✓ Wann spricht man von einem Linearfaktor?
- ✓ Wie macht man eine Polynomdivision?
- ✓ Wie funktioniert die Primfaktorzerlegung?
- ✓ Wofür nutzt man das kgV?
- ✓ Was ist das ggT?
- ✓ Wie löst man einen Doppelbruch auf?
- ✓ Wie sehen die zugehörigen Brüche einer periodische Zahl aus?

# POTENZGESETZE



$$(x^3)^4 = x^{3 \cdot 4} = x^{12}$$

$$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$$

$$\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$$

# EIGENSCHAFTEN VON POTENZEN

Wichtige Zusammenhänge für die Potenzberechnung mit rationalem Exponenten:

## Polynom:

Der höchste natürliche Exponent bestimmt den Grad des Polynoms  $x^n + a \cdot x^{n-1} + \dots + z \cdot x^0$

*Beispiel:*  $x^5 - 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 12$  *Polynom vom Grade 5*

## Wurzel:

Der Grad einer Wurzel steht immer im Nenner des Exponenten

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

*Beispiel:*  $\sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

## Brüche:

Ein negativer Exponent wird durch einen Positionswechsel positiv

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

*Beispiel:*  $\left(\frac{2}{x^2}\right)^{-2} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$

# AUFGABEN ZU POTENZEN

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzgesetze.

$$1) \sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$$4) \sqrt{\frac{y^{-2} \cdot (x \cdot z^3)^5}{x^{-3} \cdot y^4 \cdot z^7}}$$

$$2) \frac{(8u^2v^{-2}w)^4}{(81r^{-3}s^{-2}t^3)^2} \cdot \frac{(3^4r^{-3}s^4t^3)^{-2}}{(2^4u^3v^{-4}w^{-2})^{-3}}$$

$$5) \frac{(5ab^{-3}c^2)^3}{(2^{-3}x^2y^0)^{-2}} \cdot \frac{(4^{-1}a^{-2}b^0c^3)^2}{(25xy^{-3})^{-2}}$$

$$3) \frac{\sqrt[k]{a^{2-k}}}{(\sqrt[k]{a})^{3k+4}} \cdot \left( \frac{\sqrt[k]{a}}{(\sqrt[k]{a^2})^{k+3}} \right)^{-2}$$

$$6) \left[ \frac{\sqrt[2x]{n^{3x-2}}}{\sqrt[2x]{n^{4x-4}}} \cdot (\sqrt[2x]{n})^{5x-2} \right]^3$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

$$a) \sqrt{x^3} = 125$$

$$b) \left( \sqrt[3]{x^5} \right)^2 = 1024$$

$$c) \sqrt[3]{\frac{16}{x^2}} = 0,25$$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

$$I) f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 9}$$

$$II) g(x) = 5 \cdot (2x - 8)^{-2}$$

$$III) h(x) = (x^2 - 4)^2$$

# AUFGABEN ZU POTENZEN

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzgesetze.

$$1) \sqrt[3]{\sqrt{a^4} \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot a^2}$$

$$2) \frac{3(2x^{-2}y^{-3})^2}{4(3a^3b^{-2})^3} \cdot \frac{8(3a^4b^{-3})^2}{9(2x^{-1}y^{-2})^3}$$

$$3) \frac{\frac{42}{\sqrt[n]{x^{10}}}}{\frac{2n\sqrt{x^{4n-6}}}{\left(\sqrt[n]{x^2}\right)^{3-2n}}} \cdot \left(\frac{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{2n+5}}{\frac{n}{\sqrt[2]{x^{6-n}}}}\right)^{-2}$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

$$a) \left(\sqrt[12]{x^6}\right)^3 = 64$$

$$b) \left(\sqrt[3]{x}\right)^{-4} = \frac{16}{81}$$

$$c) \sqrt{\sqrt[5]{x^4}} = \left(\frac{5}{\sqrt[5]{x^4}}\right)^2$$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

$$I) f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{x-2}}$$

$$II) g(x) = 3 \cdot (x^2 - 7x + 12)^{-5}$$

# OPERATION / GEGENOPERATION

Im Bereich der Arithmetik wird durch Bildung der abhängigen Gegenoperation stets das neutrale Element erzeugt (Multiplikation: 1 und Addition: 0).

## Lineare Gleichung:

Mittels einfacher Gegenoperationen und den zugehörigen neutralen Elementen wird eine Gleichung nach der Unbekannten freigestellt.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } 3 \cdot x - 5 = 4 &\Leftrightarrow 3 \cdot x - 5 + 5 = 4 + 5 \Leftrightarrow 3 \cdot x + 0 = 9 && | +5 \\ 3 \cdot x + 0 = 9 &\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + 0 = 9 \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot x + 0 = 3 \Leftrightarrow x = 3 && | :3 \end{aligned}$$

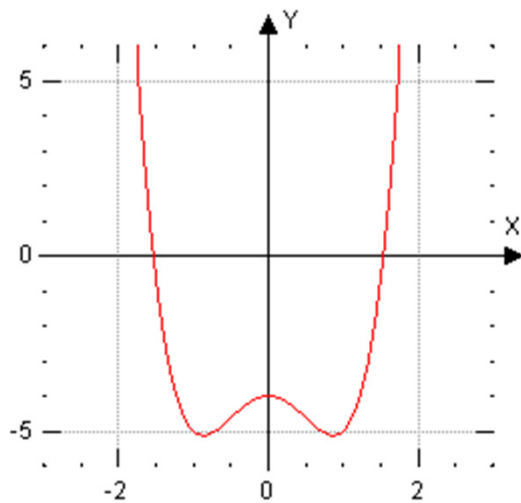
## Potenzgleichung:

Nach Überführung des Terms in einen reinen Potenzausdruck wird der Exponent mittels elementarer Umformungen zum neutralen Element 1 umgewandelt.

$$\text{Beispiel: } \sqrt[3]{x^2} = 4 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x^{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2}} = \sqrt{4^3} \Leftrightarrow x^1 = \sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8$$

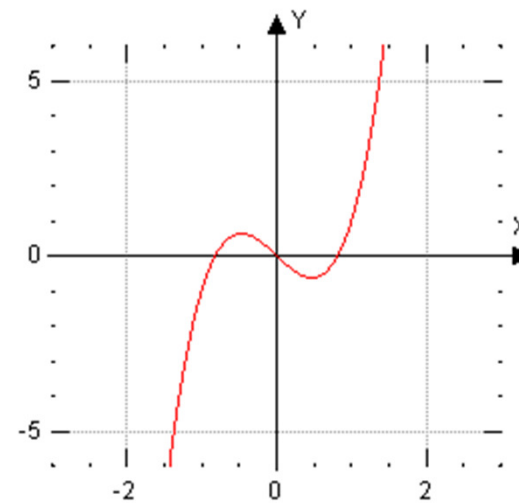
# FUNKTIONSGRAPHEN I

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 4$$



- Achsensymmetrie
- Ganzrationales Polynom (Grad 4)

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

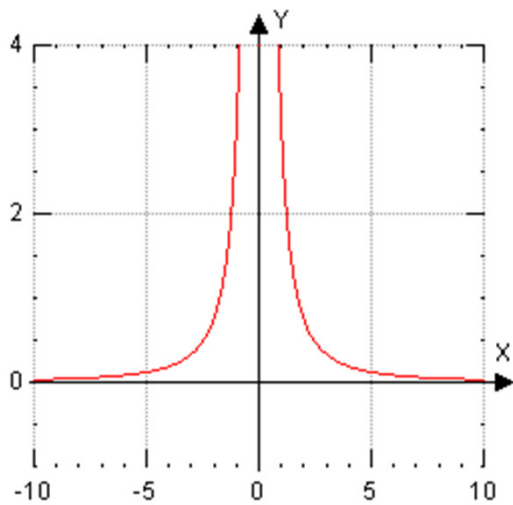


- Punktsymmetrie
- Ganzrationales Polynom (Grad 3)



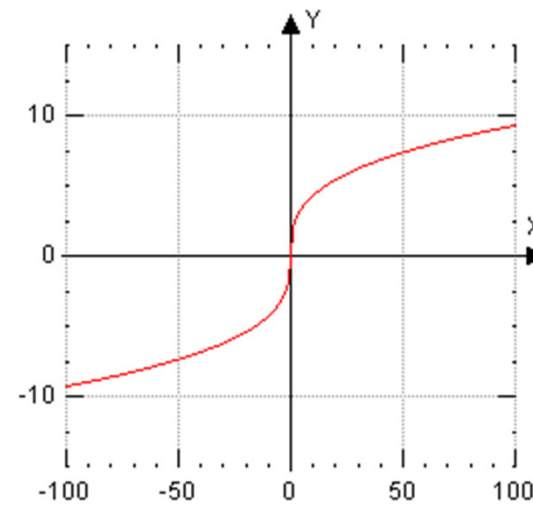
# FUNKTIONSGRAPHEN II

$$f(x) = 3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$$



- Achsensymmetrie
- Hyperbelfunktion

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{x}$$



- Punktsymmetrie
- Wurzelfunktion

# DEFINITIONS-/ WERTEBEREICH

## Definitionsbereich:

Alle Zahlen, die in einem Ausdruck/ Term **eingesetzt** werden dürfen, werden mittels Mengeneigenschaften in Abhängigkeit der zugehörigen Variablen beschrieben.

- Ein **Polynom** vom Grade  $n$  ist stets für alle reellen Zahlen definiert.
- Eine **Wurzel** darf nun aus positiven Termen inkl. der NULL gezogen werden.
- Bei **Brüchen** ist darauf zu achten, dass der Nenner nicht NULL wird.

*Beispiel:*  $f(x) = 3 \cdot \sqrt{2-x}; D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$        $g(x) = \frac{x}{x+3}; D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

## Wertebereich:

Die Zahlen, die durch einen Ausdruck/ Term berechnet werden können, ergeben den Wertebereich einer Funktion (y-Achse).

- Mit **geradem** Exponenten können nicht alle reellen Zahlen abgebildet werden.
- Mit **ungeradem** Exponenten werden alle reellen Zahlen erreicht.
- Bei **Brüchen/ Wurzeln** muss auf Ausnahmen geachtet werden (Definitionsbereich).

*Beispiel:*  $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2; W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 2\}$        $g(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}; W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

# AUFGABEN

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- bzw. Wertebereich an, bestimmen das Symmetrieverhalten und zeichnen Sie eine grobe Skizze.

a)  $f(x) = \frac{4}{x^2 - 9}$

b)  $g(x) = x^3 - 5x + \frac{1}{2x}$

c)  $h(x) = \sqrt[4]{-3 \cdot (x^3 - 8)}$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?