Mathe-Party
Fulda

Themenkatalog

- Mengenlehre
- Aussagenlogik
- Relationen
- Funktionen
- Vollständige Induktion
- Folgen
- Reihen
- Grenzwerte
- Funktionseigenschaften
- Differentialrechnung
- Integralrechnung

VORSPEISE

Mengenlehre

1) Gegeben sei die Menge A mit allen Natürlichen Zahlen zwischen 4 und 14, die durch drei teilbar sind und die Menge $B = \{7; 9; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$.
Geben Sie die Lösungsmenge auf je 2 Varianten an (2xAufzählung und 2xEigenschaften).

   a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \backslash B$ d) $A \backslash B$

2) Gegeben sei die Menge $A = \{1; \{2; 3; 4\}; \{5\}; \{\{6\}; 7\}; 8\}$.
Bei welchen der gegebenen Zerlegungen handelt es sich um eine Klasseneinteilung?

   a) $X = \{\{1; \{5\}; \{8\}\}; \{\{2; 3; 4; 7\}\}; \{\{5\}\}\}$
   b) $Y = \{\{\{5\}; \{2; 3; 4\}\}; \{\{6\}; 7\}; \{8; 1\}\}$
   c) $Z = \{\{1; 7; 8\}; \{\{2; 3; 4\}\}; \{\{5\}\}; \{\{6\}\}\}$

3) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck und geben Sie die angewandten Gesetze an.

$$\left(x \vee (\overline{y \wedge x})\right) \wedge \left((z \vee x) \vee (\bar{x} \vee z)\right)$$

4) Sei $P(X)$ die Potenzmenge von $X = \{0; 1\}$. Die Relation $R \subset P(X) \times P(X)$ sei definiert durch $(a, b) \in R \Leftrightarrow a \subseteq b$

   a) Geben Sie die Menge P(X) explizit an?
   b) Geben Sie alle Elemente von R an!
   c) Fertigen Sie eine Skizze an, die R vollständig beschreibt!
   d) Kreuzen Sie einfach an (ausnahmsweise ohne Begründung):

Die Relation R ist	reflexiv	wahr	falsch
	transitiv	wahr	falsch
	symmetrisch	wahr	falsch
	antisymmetrisch	wahr	falsch
	vollständig	wahr	falsch

   d) Ist die Relation R eine Funktion? (Begründung)

Aussagenlogik

5) Geben Sie zu der gegebenen Aussage die KNF und DNF an.

$$A(p, q, r) = (r \vee (p \rightarrow q)) \wedge (\neg r \vee q)$$

6) Zeigen Sie mittels 2 Verfahren (Wahrheitstabellen, Gesetzen oder Resolution), dass folgende Implikation gilt.

$$A(p, q) = p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$$

Relationen

7) Geben Sie die Eigenschaften der folgenden Relation an:

$$\{(a,b) \in \mathrm{N}x\mathrm{N} \mid \sqrt{a} - \sqrt{b} = 2 \cdot k; k \in \mathrm{N}\} \; \mathrm{N} = \{0,1,2,\ldots\}.$$

8) Geben Sie die Eigenschaften der folgenden Relation an:

$$\psi = \{x \times y \in \Re^2 x \Re^2 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 = (y_1)^2 + (y_2)^2\}, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

Funktionen

9) Geben Sie zu den Funktionen deren Definitionsbereich an und bestimmen die Schnittpunkte an

a) $f(x) = \sqrt{13 - 3x} \wedge g(x) = x - 1$

b) $i(x) = \frac{2x^2}{x^2+4x} - \frac{5x+4}{3x+12} \wedge j(x) = \frac{x-5}{3x}$

10) Begründen Sie bei den folgenden Aufgaben, warum es sich um eine Funktion handelt und welche weiteren Eigenschaften diese besitzt.

$$\{(x,y) \in RxR \mid 2 \cdot y = e^{\alpha \cdot x}; \alpha \in \mathrm{Z}\}$$

Vollständige Induktion

11) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage über die Teilbarkeit gültig ist.

$$9^{\mathrm{n}} + 7; \mathrm{n} \geq 0 \text{ ist durch 8 teilbar}$$

12) Beweisen Sie, dass die Bernoulli-Ungleichung $1 + n \cdot a \leq (1 + a)^n; n \in \mathbb{N}$ gültig ist.

13) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\sum(k-1) \cdot ln\left(\frac{k}{k-1}\right) = n \cdot ln(n) - ln(n!)$ gültig ist.

Folgen

14) Begründen Sie mittels Differenz- oder Quotientenmethode die Monotonie der gegebenen Folge und beweisen deren Beschränktheit.

$$a_n = \sqrt{2} + e^{-2n}; n > 0$$

15) Untersuchen Sie bei der Folge die Konvergenz. Berechnen Sie dazu die Monotonie und Schranken und geben den zugehörigen Grenzwert an.

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + 2;\ a_1 = 2{,}25\ \ und\ \ n \geq 1$$

Reihen

16) Untersuchen Sie bei der Reihe die Konvergenz und bestimmen deren Grenzwert .

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{3 \cdot 9^k}{(2k+1)!}$$

17) Bestimme Sie bei der folgenden Reihe deren Konvergenzradius.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n \cdot x^k}{\sqrt{42 \cdot k!}} ; n \in \mathbb{N}$$

18) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Gleichung erfüllt?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \cdot x\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1} \cdot (x-1)^k ; n \in \mathbb{N}$$

Grenzwerte

19) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und geben das angewandte Verfahren an.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x} - \left(1+\frac{3}{x}\right)^x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\cos(5\pi - x\cdot\pi)}{4x-8}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[x]{e} \cdot \frac{3x^2-5x+7}{x-8+6x^2}\right)$

20) Berechnen Sie von der gegebenen Folge den Grenzwert für $n \to \infty$.
Ab welchem Element ist die Abweichung von diesem Wert kleiner als 0,05?

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{5-2x}{2+5x}$$

21) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert auf zwei Arten.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{\frac{1}{3} \cdot \sqrt{9+2x} - 1} \right)$$

Asymptoten

22) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

a) $f(x) = \frac{2x^3-4x^2-50x+100}{x^3-4x^2-11x+30}$ b) $g(x) = \frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^2+3x+2}$ c) $h(x) = \frac{2x^2+4x-16}{x^3-7x+6}$

Funktionseigenschaften

23) Prüfen Sie für welche Parameter die folgende Funktion stetig und differenzierbar ist.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b; x\geq 1 \\ x(2-b)+2a; x<1 \end{cases}$$

24) Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten, beweise die Periode.

a) $f(x)=2\cdot\sin^3(3x+2\pi)-4$ b) $g(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(2-4\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)+3$ c) $h(x)=[3\cdot\cos(2x-1{,}5\pi]^2-2$

25) Prüfen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen.

a) $f(x)=(\cos(x))^4-\ln x^2+42$ b) $h(x)=4\sin^3(x)-\frac{4}{x^5}+2x^3$

Ableitungen

26) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x)=12\cdot e^{\sqrt[3]{4-2x^2}}$ b) $g(x)=0{,}25\cdot(3x^3-\cos(2x))^4$ c) $h(x)=\frac{2\cdot\sqrt{2x-5}}{(4-3x)^3}$

27) Berechnen Sie von der folgenden Funktion die Wendepunkte und Extrempunkte.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+42$$

Anwendung der Differentialrechnung

28) Bestimmen Sie die Seitenlänge *a* und *b* sowie den Flächeninhalt *A* desjenigen gleichschenkligen Dreiecks, das bei dem gegebenen Umfang *U = 6cm* den maximalen Flächeninhalte A hat.

29) Bestimmen Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3, deren Graph bei x=3 einen Tiefpunkt hat und einen Wendepunkt bei $\left(2/\frac{2}{3}\right)$ hat. Die Tangente im Wendepunkt hat die Steigung -2.

Integrale

30) Berechnen Sie die folgenden Integrale und klassifizieren es.

a) $\int\left(2\cdot e^{4-0{,}5x}\right)dx$ b) $\int_1^3\left(x^2-6x+8\right)dx$ c) $\int_2^\infty\left(\frac{4}{x^3}\right)dx$ d) $\int_\alpha^\infty\left(\frac{2}{(2x+3)^3}\right)dx=0{,}5$

31) Bestimmen Sie die Fläche zwischen den gegebenen Funktionen.

a) $f(x)=x^2-3x+2\wedge x-Achse$ b) $f(x)=2\cdot\sqrt{2x+5}\wedge g(x)=x$

32) Geben Sie die zugehörige Stammfunktion der gegebenen Funktionen an.

a) $h(x)=\frac{x^3-1}{x^4-4x+5}$ b) $g(x)=\frac{2}{\sqrt{4-3x}}$ c) $f(x)=3x^2\cdot\sin(2-x)$

HAUPTSPEISE

Mengenlehre

33) Gegeben sei die Menge A mit allen Ganzen Zahlen zwischen -3 und 7, die durch 2 teilbar sind und die Menge $B = \{-1; 2; 3; 5; 7; 8; 9\}$.
Geben Sie die Lösungsmenge auf je 2 Varianten an (2xAufzählung und 2xEigenschaften).

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A / B d) B / A

34) Gegeben sei die Menge $A = \{T, O, R\}$.
Geben Sie die zugehörige Potenzmenge $P(A)$ an und geben an, welche der gegebenen Aussagen wahr bzw. falsch sind?

a) $ROT \in P(A)$ b) $\{\ \} \subset P(A)$ c) $\{\{TR\}\} \subset P(A)$
d) $\{T\} \in P(A)$ e) $R \subset P(A)$ f) $\{\{TOR\}\} \in P(A)$
g) $\{TO\} \subset P(A)$ h) $\{\ \} \in P(A)$ i) $\{\{\ \}\} \subset P(A)$

35) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck und geben Sie die angewandten Gesetze an.

$$A \cap (\overline{\overline{B} \cap A}) \cup (\overline{\overline{A} \cup B}) \cup (A \cap B)$$

36) Berechnen Sie den ggT von 627 und 357 mit Hilde des Euklidischen Algorithmus.

Aussagenlogik

37) Bestimmen Sie die Erfüllungsmenge E der folgenden Aussagenverbindung. Geben Sie anschließend an, ob es sich um eine Tautologie, Kontingenz bzw. Kontradiktion handelt.

a) $A(p,q,r) = p \rightarrow (q \vee r) \leftrightarrow \neg(q \vee r) \rightarrow \neg p$

b) $A(p,q,r) := \neg(p \rightarrow (q \vee r)) \vee (q \wedge r)$

c) $A(a,b,c) := a \wedge b \rightarrow c \leftrightarrow a \wedge (b \rightarrow c)$

38) Prüfen Sie, ob die beiden Ausdrücke $A_1(x,y,z) := (x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) \rightarrow z$ und $A_2(x,y,z) := x \vee y \rightarrow z$ identisch sind.
Begründen Sie Ihre Lösung, in dem Sie die Gültigkeit durch Herleitung und mit Hilfe der Wahrheitstabelle zeigen.

39) Überführen Sie die gegebene Aussageform in die KNF und DNF. Ist Sie kanonisch?

$$A(p,q,r) = (p \rightarrow q) \wedge \neg q \wedge (\neg p \rightarrow r)$$

Relationen

40) Betrachte die Menge aller Zahlentripel $(x_1, x_2, x_3,)^T$.
Welche Eigenschaften besitzt die Relation $xQy \Leftrightarrow |x| = |y|$ mit $x, y \in R^3$?

41) Gegeben ist die folgende Situation:

Auf dem Alphabet $\sum = \{\nabla, \infty, \perp\}$ wird die Menge $L(\sum)$, die aus allen Strings der Länge 3 mit Symbolen aus $\sum$ besteht, gebildet. Wir definieren die Relation R mit
$R = \{(x, y) \in L(\sum) x L(\sum) \mid$ x und y haben die selbe Anzahl gleicher Zeichen$\}$
Beschreiben Sie die Menge $L(\sum)$ durch Aufzählung ihrer Elemente und beweisen die Eigenschaften der Relation.

Funktionen

42) Geben den Definitionsbereich an und berechnen die Nullstellen der Funktionen.

a) $f(x) = \sqrt{7x - 12} - x$

b) $g(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{7}{4}x^2$

43) Gegeben sind zwei Funktionen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (2x, 3x + 1)$ und $g(x, y) = x - 5y$. Bestimmen Sie die Kompositionen $g \circ f$ und $f \circ g$.

Folgen

44) Bestimmen Sie mittels Differenz- und Quotientenmethode die Monotonie der Folge.

$$a_n = 4 - \frac{3}{n}; \;\; n \geq 1$$

45) Geben Sie von den rekursiven Folgen die intuitive Darstellung und auch die explizite Definition an und beweisen diese.

a) $a_n = \frac{1}{a_{n-1}}; \; a_1 = \frac{1}{2}$

b) $a_n = a_{n-1} + 2 \cdot n + 1; \; a_1 = 2$

46) Zeigen Sie:

Die Folge a_n sei rekursiv gegeben mit $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot a_n^2 + 1}; a_1 = 4$ für $n \geq 1$.

a) Die Folge ist streng monoton wachsend oder fallend.
b) Die Folge besitzt eine obere und untere Schranke.
c) Die Folge ist konvergent.
d) Berechnen Sie den Grenzwert.

Vollständige Induktion

47) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage gültig ist.

$$3^{n+1} + 2^{3n+1}; n \geq 0 \; ist \; durch \; 5 \; teilbar$$

48) Zeigen Sie, dass $n^2 \geq n + 5; n > 2$ gilt.

49) Beweisen Sie, dass die Gleichung $\sum(3k - 2) = \frac{(1+n)\cdot(3n-4)}{2}$ richtig ist.

Reihen

50) Untersuchen Sie bei der Reihe die Konvergenz und bestimmen deren Grenzwert .

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}-\left(\frac{2}{k}\right)^{2}\right]$$

51) Bestimme Sie bei der folgenden Reihe deren Konvergenzradius.

$$\sum_{k=5}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^{-k}}\cdot(x^2)^k$$

52) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die folgende Gleichung erfüllt?

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}x\right)^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2+k}\cdot(x+2)^k$$

Grenzwerte

53) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und geben das angewandte Verfahren an.

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos(2x)}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\ln(1+\ln(2-x)}{\sin(\pi x)}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cdot\frac{2x}{\sqrt{4+x}-2}\right);(2\,Arten)$

54) Bestimmen Sie den Grenzwert mittels einer geeigneten Substitution.

$$\lim_{x\to0^+}\left(x\cdot ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

55) Bestimmen Sie den Grenzwert auf zwei Arten.

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{2x-6}{2\cdot\sqrt{48-3x}-3x}\right)$$

Asymptoten

56) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

a) $f(x)=\frac{3x^3-3x^2-30x-24}{2x^3-6x^2-32x-24}$ b) $g(x)=\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+x-6}$ c) $h(x)=\frac{x^2-2x-15}{x^3+x^2-9x-9}$

Funktionseigenschaften

57) Überprüfen Sie ob die gegebene Funktion an der Stelle x=0 stetig und differenzierbar ist.

$$f(x) = (x-1)e^{-|x|}$$

58) Prüfen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \left(x^4 - 12\right)^3$ b) $h(x) = \frac{2}{x} - \sin(3x) + \sqrt[5]{x}$

Ableitungen

59) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $h(x) = \frac{4 \cdot \ln x}{\sin(x)}$ b) $g(x) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} \cdot \frac{\cos(3)}{2x}$ c) $f(x) = \left(x^3\right)^4 - \frac{4}{3\sqrt{x}}$

60) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte und geben den Definitionsbereich an.

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{4 + 5x - x^2}$$

61) Berechnen Sie den Definitionsbereich und ermitteln ggf. die Ersatzfunktion.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 4}{2x^3 - 2x^2 - 16x + 24}$$

Anwendung der Differentialrechnung

62) Bestimmen Sie die Seitenlänge *a* und *b* sowie den Flächeninhalt *A* desjenigen Rechtecks, das bei dem gegebener Diagonalen Länge $d = 6\sqrt{2}$ den maximalen Flächeninhalte A hat.

63) Bestimmen Sie die Gleichung einer achsensymmetrischen, ganzrationalen Funktion vom Grad 4, deren Graph bei x=2 eine Wendetangente $(y = 4x - 2)$ hat.

Integrale

64) Berechnen Sie die folgenden Integrale und klassifizieren es.

a) $\int \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \sin(4-3x)dx$ b) $\int_0^{4\pi} (\sin(0{,}5x))dx$ c) $\int_\alpha^\infty \left(\frac{1}{(x-4)^2}\right)dx = \frac{1}{3}$ d) $\int_1^4 \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)dx$

65) Bestimmen Sie die Fläche zwischen den gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \wedge x - Achse$ b) $f(x) = 2x^2 - 5x \wedge g(x) = 2x + x^2 - 12$

66) Geben Sie die zugehörige Stammfunktion der gegebenen Funktionen an.

a) $h(x) = \frac{1}{3x} \cdot \ln x^2$ b) $g(x) = (4-5x)^5$ c) $f(x) = x^2 \cdot e^{4-x}$

NACHSPEISE

Mengenlehre

67) Gegeben sei die Menge A mit allen Natürlichen Zahlen kleiner gleich 36, die durch vier teilbar sind und die Menge $B = \{32; 33; 34; 35; 36; 37; 38; 39; 40\}$.
Geben Sie die Lösungsmenge auf je 2 Varianten an (2xAufzählung und 2xEigenschaften).

b) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \backslash B$ d) $A \backslash B$

68) Gegeben sei die Menge $A = \{a; \{b; c\}; \{d\}; \{\{e\}; f\}; g; h\}$.
Welchen der gegebenen Aussagen bzgl. Element bzw. Teilmenge sind wahr?

a) $a; g; d \in A$	b) $\{\{b; c\}\}; \{g; h\} \subset A$	c) $\{b; c; d\} \in A$
d) $\{\ \}; \{\{d\}\} \subset A$	e) $\{\{e\}; f\} \in A$	f) $\{a; g; \{f; \{e\}\}\}; \{d\} \subset A$
g) $\{\ \}; h \in A$	h) $\{\{d; f; c\}\} \subset A$	i) $g; \{d\} \in A$

69) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck und geben Sie die angewandten Gesetze an.

$$X \cup \left((Y \cap 1) \cup \overline{X} \right) \cap \left(\overline{Y \cup \overline{Y}} \cap \overline{X} \right)$$

70) Interpretieren Sie die Zahl 101 als Dual- und Hexadezimalzahl.
Welchen Wert haben diese Zahlen im Dezimalsystem? Ist diese Abbildung injektiv?

Aussagenlogik

71) Geben Sie für die folgenden beiden Schaltungen die zugehörigen Aussageformeln an und zeigen Sie, dass beide Ausdrücke äquivalent zueinander sind (Begründung).

72) Formen Sie den folgenden Ausdruck unter Benennung aller angewandten Gesetze um?

$$F(x, y, a, b, c) := ((x \wedge y) \vee (a \wedge b \wedge c) \wedge ((x \wedge y) \vee \neg a \vee \neg b \vee \neg c)$$

73) Bestimmen Sie die zugehörige KNF und DNF?

$$A(p, q, r) = p \rightarrow (q \vee r) \leftrightarrow \neg(q \vee r) \rightarrow \neg p!$$

Relationen

74) Gegeben sei die Menge $\mathrm{M} = \{\mathrm{x} \in \mathbb{Z}^{>0} | \mathrm{xmod2} = 0\}$ (geraden, positiven Zahlen).
Begründen Sie alle relevanten Eigenschaften.

$$\Delta = \left\{ (x; y) \in \mathrm{M} \times \mathrm{M} | \frac{x}{y} = \beta^2; \beta \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

75) Bestimmen Sie alle Eigenschaften der Relation $\leq$ auf der Fläche R^2 definiert durch
$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$

76) Betrachten Sie die Menge $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ und B= $\{30,40,60\}$ Die Relation $R \subset A \times B$ sei definiert durch $(a, b) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a|b$. Geben Sie alle Elemente von R an und fertigen eine Skizze an. Welche Eigenschaften besitzt die Relation?

Funktionen

77) Geben Sie den Definitionsbereich an und bestimmen die Schnittpunkte der Funktionen.

a) $f(x) = 4 - 5 \cdot \sqrt{16 + x^2}; g(x) = 2x - 7 \cdot \sqrt{x^2 + 16}$

b) $i(x) = x^2 \cdot (x^8 - 30x^3); j(x) = 32 + x^5$

78) Untersuchen Sie die gegebenen Relationen auf Funktionseigenschaft und benennen deren Eigenschaften. Machen Sie sie anschließend bijektiv.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = sin^2(x)\}$

b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = \frac{4}{x^2-9} + 3\right\}$

c) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = ln\left(\sqrt{x - 4}\right)\right\}$

Folgen

79) Bestimmen Sie mittels Differenz- und Quotientenmethode die Monotonie der Folge.

$$a_n = 3 + \left(\frac{2}{5}\right)^n ; \ n \geq 0$$

80) Geben Sie von den rekursiven Folgen die intuitive Darstellung und auch die explizite Definition an und beweisen diese.

b) $a_{n+1} = 3 \cdot a_n; \ a_1 = 3$ b) $a_n = 1; 9; 17; 25$

81) Zeigen Sie:
Die Folge a_n sei rekursiv gegeben mit $a_{n+1} = \sqrt[3]{2a_n + 25}; a_1 = 1$ für $n \geq 1$.
e) Die Folge ist streng monoton wachsend oder fallend.
f) Die Folge besitzt eine obere und untere Schranke.
g) Die Folge ist konvergent.
h) Berechnen Sie den Grenzwert.

Vollständige Induktion

82) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage gültig ist.

$$3^{2n} + 7; n \geq 0 \ ist \ durch \ 8 \ teilbar$$

83) Zeigen Sie, dass $2^n > n^3; n \geq 10$ gilt.

84) Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung für die folgende Produktreihe richtig ist.

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2 \cdot n}$$

Reihen

85) Untersuchen Sie bei der Reihe die Konvergenz und bestimmen deren Grenzwert.

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left[\frac{2^{2k+1}}{3\cdot k!}\right]$$

86) Bestimme Sie bei der folgenden Reihe deren Konvergenzradius.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k^3+1)\cdot x^k}{5^k\cdot 12}$$

87) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die folgende Gleichung erfüllt?

$$\sum_{k=2}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^k}=\int_1^{e^t}\left(\frac{cos\left(ln(x)\right)}{x}\right)dx$$

Grenzwerte

88) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und geben das angewandte Verfahren an.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(2+\frac{6}{x}\right)^4-\frac{3}{\sqrt[x]{x^2}}+4\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^4(x)-3\sin(x)}{2x\cdot\cos(2x)}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\cdot\frac{3x-12}{5-\sqrt{4x+9}}\right);2Arten$

89) Berechnen Sie von der gegebenen Folge den Grenzwert für $n\to\infty$. Ab welchem Element ist die Abweichung von diesem Wert kleiner als 0,001?

$$a_n = 0{,}1\cdot\frac{5x+3}{4+2x}$$

Funktionseigenschaften

90) Überprüfen Sie ob die Funktion für alle reellen Zahlen stetig und differenzierbar ist.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-2};x>3\\ -\dfrac{2}{3}x^2+9;x\le 3\end{cases}$$

91) Wie müssen die beiden Parameter a; b $\in \mathbb{N}$ gewählt werden, damit die Funktion sowohl stetig als auch differenzierbar ist?

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x);x\le\pi\\ a\cdot x+b;x>\pi\end{cases}$$

92) Prüfen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen.

a) $f(x)=\frac{2}{x^4}-((x-3)\cdot(x+3)^2+\cos(x)$ b) $h(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-(4x)^{-2}+(5x-x^7)$

Asymptoten

93) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

a) $f(x)=\dfrac{-5x^3+5x^2+40x-60}{2x^3+10x^2-4x-48}$ b) $g(x)=\dfrac{x^3+7x^2-36}{x^2+x-30}$ c) $h(x)=\dfrac{15-8x+x^2}{2x^3-2x^2-64x+120}$

Ableitungen

94) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

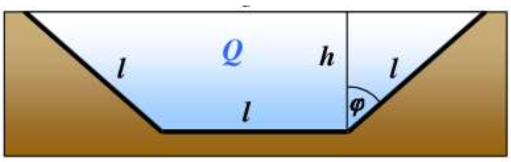
a) $h(x)=\dfrac{4x^3-5}{(2x-7)^2}$ b) $g(x)=3e^x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ c) $f(x)=x^5\cdot\dfrac{3\sin(x)}{\ln x}$

95) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte und geben den Definitionsbereich an.

$$f(x)=9-\frac{21-3x^2}{x-1}$$

Anwendung der Differentialrechnung

96) Für eine Bewässerungsanlage soll ein Kanal mit trapezförmingen Querschnitt aus drei gleich großen Betonfertigplatten (Länge 16m) gebaut werden. Wie sind die Platten anzuordnen, dass möglichst viel Wasser transportiert werden kann.



97) Der Graph einer punktsymmetrische, ganzrationalen Funktion vom Grad 5 berührt die x-Achse im Ursprung und hat in $W=\left(1/\frac{2}{15}\right)$ einen Wendepunkt.

Integrale

98) Berechnen Sie die folgenden Integrale und klassifizieren es.

a) $9\cdot\int\sqrt[3]{5x-2}\,dx$ b) $\int_0^1\left(3x\cdot e^{1-x}\right)dx$ c) $\int_\alpha^\infty\left(\dfrac{6}{(4-3x)^2}\right)dx=1$ d) $\int_1^4\left(x^3-3x^2-4x+12\right)dx$

99) Bestimmen Sie die Fläche zwischen den gegebenen Funktionen.

a) $f(x)=x^3-x^2-8x+12\wedge x-Achse$ b) $f(x)=2x+10\wedge g(x)=-8x-x^2-11$

100) Geben Sie die zugehörige Stammfunktion der gegebenen Funktionen an.

a) $h(x)=(3x^2-5x)^5\cdot(18x-15)$ b) $g(x)=2\cdot\sin(\frac{2}{3}x+\pi)$ c) $f(x)=4\cos(4-2x)\cdot\sin(2x+3)$