Methodik zur Grenzwertbestimmung I

I. Bekannte Zusammenhänge:

Ist ein existierender Grenzwert vorhanden?

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha} \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

II. Faustregel:

Trifft $\infty / 0$ auf Konstant?

$$\lim(\text{Ausdruck}) = K/0 \to \infty \;; \quad \lim(\text{Ausdruck}) = K/\infty = 0$$

III. Gebrochen-Rationaler Ausdruck:

Polynom vom Grade m / Polynom vom Grade n

$x \to \infty$

a) Grad (Zähler) - m > Grad (Nenner) - n $\Rightarrow \infty$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 - 3x + 5}{5 - x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4\left(2 \overbrace{- 3/x^3 + 5/x^4}^{0}\right)}{x^2\left(\underbrace{5/x^2}_{0} - 1\right)} \approx \frac{2x^2}{-1} \to -\infty$$

b) Grad (Zähler) - m < Grad (Nenner) - n $\Rightarrow 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 25}{x^3 - 4x + 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(2 - \overbrace{\frac{25}{x}}^{0}\right)}{x^3\left(1 \underbrace{- \frac{4}{x^2} + \frac{7}{x^3}}_{0}\right)} \approx \frac{2}{x^2} \to 0$$

c) Grad (Zähler) - m = Grad (Nenner) - n $\Rightarrow$ Konstant

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 7x + 5}{4 - x^2 + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(2 \overbrace{- 7/x + 5/x^2}^{0}\right)}{x^2\left(\underbrace{4/x^2}_{0} - 1 + 1/x\right)} \approx \frac{2}{-1} \Rightarrow -2$$

$x \to K$

d) unabhängig vom Grad (Nenner) und Grad (Zähler)

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}{x^2 + x - 6} \approx 0/0$$

Linearfaktor zu $x = 2$ $(x-2)$ läßt sich kürzen.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)(x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+3)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x+1)(x+4)}{(x+3)} = \frac{3 \cdot 6}{5} = 18/5 = 3\,3/5$$

Methodik der Grenzwertbestimmung II

IV Erweiterung:

Mittels Erweiterungen (z.B. 3. Binom) kann man formal Ausdrücke vereinfachen.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{2\cdot\sqrt{6-x}-4} \approx \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{2\cdot\sqrt{6-x}-4} \cdot \frac{2\cdot\sqrt{6-x}+4}{2\cdot\sqrt{6-x}+4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\cdot(2\cdot\sqrt{6-x}+4)}{4(6-x)-16}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\,(2\sqrt{6-x}+4)}{-4\cancel{(x-2)}} = \frac{8}{-4} = -2$$

V. Substitution:

Ersetzen eines Teils, um auf einen bekannten Grenzwert zu kommen.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} \; ; \text{ setze } y = 1/x : \; x \to \infty \Leftrightarrow y \to 0$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$$

VI. Regel von L'Hospital:

Bei $0/0$ geht man ins Krankenhaus

$$\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to k} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \approx 0/0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{[\sin(x)]'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1/1 = 1$$

VII Dominanzprinzip

Der stärkere Ausdruck gewinnt (Unendlich trifft die Null)

$$\infty \cdot 0 \rightarrow \begin{cases} 0 : & x^2 \cdot \frac{1}{e^x} \to 0 \\ K : & e^{x+2} \cdot \frac{1}{e^x} \to e^2 \\ \infty : & e^x \cdot \frac{1}{x^2} \to \infty \end{cases}$$

exponential ist stärker als quadratisch