VORKURS

13.10.2021

QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine quadratische Gleichung/ Funktion stellt graphisch gesehen immer eine **Parabel** dar $x^2 + p \cdot x + q = 0$.
Um eine quadratische Gleichung lösen zu können, bringt man diese auf die sogenannte **Nullform**.
Die Lösungen dieser Gleichung (**Schnittpunkte mit der x-Achse**) erhält man durch die folgenden Lösungsverfahren:

✓<u>Quadratische Ergänzung</u>: $(x+a)^2 + b = 0 \Rightarrow S(-a;b)$

✓<u>p-q-Formel</u>: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

✓<u>Satz von Vieta</u>: $x^2 + p \cdot x + q = (x+a) \cdot (x+b) = 0$

P-Q-FORMEL

Um die p-q-Formel zu beweisen, nutzt man das Verfahren der quadratischen Ergänzung auf die allgemeine quadratische Gleichung der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Es ist darauf zu achten, dass zum einen durch **elementare Umformungen** die **NULL-Form** der Gleichung entsteht und zum anderen **kein Faktor** vor dem x^2 auftauchen darf.

<u>Beweis</u>: $x^2 + p \cdot x + q = 0$

Wurzel *Halbierung* *Subraktion des Quadrats*

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \qquad \left| + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \right.$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad \left| \sqrt{} ; \right| - \frac{p}{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

<u>Aufgabe</u>: Entwickeln Sie die Mitternachtsformel basierend auf $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Beispiele

$$2 \cdot x^2 + 8 \cdot x = -6 \Leftrightarrow x^2 + 4 \cdot x + 3 = 0 \qquad | +6; | \cdot \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 4 \cdot x + 3 = (x+2)^2 - 2^2 + 3 = (x+2)^2 - 1 = 0$$
$$(x+2)^2 = 1 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$
$$x_1 = -3 \vee x_2 = -1$$

quadratische Ergänzung

$$x^2 + 4 \cdot x + 3 = 0; p = 4 \wedge q = 3$$
$$x_{1/2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} = -2 \pm 1$$
$$x_1 = -3 \vee x_2 = -1$$

p-q-Formel

$$x^2 + 4 \cdot x + 3 = x^2 + (3+1) \cdot x + (3 \cdot 1) = 0$$
$$(x+3) \cdot (x+1) = 0$$
$$x_1 = -3 \vee x_2 = -1$$

Satz von Vieta

DIE PARABEL

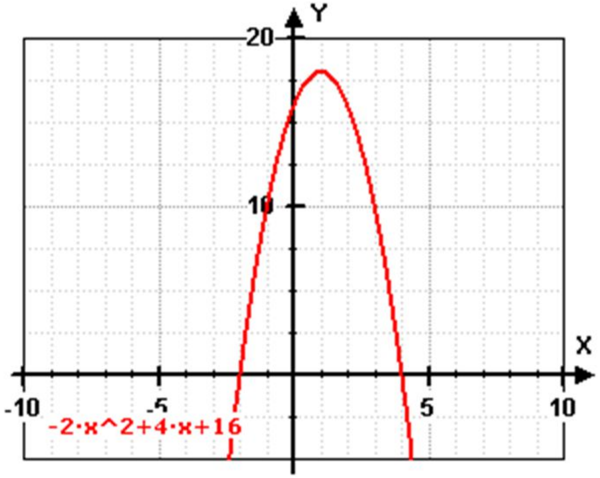
Bei einer Parabel handelt es sich um die graphische Darstellung einer quadratischen Funktion. Die relevanten Punkte bzw. der Verlauf kann bereits im Vorfeld näher bestimmt werden.

Allgemeine Form:	$f(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma$
✓Verlauf:	gestreckt $\lvert\alpha\rvert > 1$ bzw. gestaucht $\lvert\alpha\rvert < 1$ nach oben geöffnet $\alpha > 0$ bzw. nach unten $\alpha < 0$
✓Achsenschnittpunkte:	y-Achse: $S_y(0/\gamma)$ bzw. x-Achse: $f(x) = 0$ (p-q-Formel)
✓Scheitelpunkt:	Scheitelpunktform: $f(x) = \alpha \cdot (x + a)^2 + b \Rightarrow S(-a; b)$ Tiefpunkt $\alpha > 0$ bzw. Hochpunkt $\alpha < 0$
✓Symmetrie:	Achsensymmetrie $f(x) = \alpha \cdot x^2 + \gamma$ Sonst Symmetrie zur parallelen zum Scheitelpunkt

BEISPIEL

Funktionsgleichung:

$f(x) = -2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 16$



✓Verlauf: gestreckt, da $|\alpha| = |-2| > 1$
nach unten geöffnet, da $\alpha = -2 < 0$

✓Schnittpunkte: $S_y(0;16)$

$S_x : 0 = x^2 - 2 \cdot x - 8 = (x-4) \cdot (x+2) \quad S_{x_1}(-2;0); S_{x_2}(4;0)$

✓Scheitelpunkt: $f(x) = -2 \cdot \left((x-1)^2 - 1^2 - 8\right) = -2 \cdot (x-1)^2 + 18$
Scheitelpunkt (Hochpunkt): $S(1;18)$

✓Symmetrie: Achsensymmetrie zur Parallelen durch $x = 1$

BI-QUADRATISCHE GLEICHUNG

Eine **Bi-Quadratische Gleichung** $x^n + p \cdot x^{\frac{n}{2}} + q = 0$ ist dann vorhanden, wenn zwei Exponenten im Verhältnis 1:2 stehen und eine weitere Konstante existiert.

Nach der **Substitution** der Variablen stehen die bekannten Lösungsverfahren zur Verfügung und man erhält nach **Resubstitution** die Lösungsmenge.

Beispiel: $x^4 - 17 \cdot x^2 + 16 = 0$

<u>Substitution</u>: $z = x^2$

$$z^2 - 17 \cdot z + 16 = (z - 16) \cdot (z - 1) = 0$$

$$z_1 = 16 \vee z_2 = 1$$

<u>Resubstitution</u>: $x = \pm\sqrt{z}$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \vee x_{3/4} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

POLYNOMDIVISION

$$x^3 + 3x^2 - 16x + 12 = 0$$

1. Bestimmen Sie die möglichen Teiler.

Weil die konstante Zahl 12 vorhanden ist, erhalten Sie als Menge möglicher Teiler: $M_{12} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$

2. Wo ist die Gleichung null?

Setzen Sie nun, bei den kleinen Zahlen beginnend, die Werte aus der Teilermenge in die Gleichung für x ein und prüfen, wann tatsächlich null herauskommt.

Für $x = 1$ erhalten Sie $1^3 + 3 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 12 = 0$ also einen Treffer, so dass Sie durch $(x - 1)$ dividieren können.

3. Führen Sie die Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 & +3x^2 & -16x & +12) & :(x-1) = x^2 + 4x - 12 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\
\hline
 & 4x^2 & -16x & +12 & \\
 & -(4x^2 & -4x) & & \\
\hline
 & & -12x & +12 & \\
 & & -(-12x & +12) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

1) **Arithmetik:**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a) $-a+(3-(b+5-(c-2+(a+b))))-(c-4)$

b) $(2y+\frac{1}{2}x)(x-4y)-8(\frac{1}{4}x+y)^2$

2) $(2a^2-5ab+10ac+2b^2+12c^2-11bc):(a-2b+3c)$

$(8x^2y^2-14xy^2-6xyz+3y^2-3xy^2z+9yz+2x^2y^2z):(2xy-3y)$

3) $x^3-2x^2-5x+6=0$

$x^4-x^3-7x^2+x+6=0$

$2x^3-22x=8x^2-60$

$x^4+3x^3-13x^2-27x+36=0$

WURZEL - GLEICHUNG

Sofern die gesuchte Variable unter einer Wurzel steht, handelt es sich um eine Wurzel-Gleichung. Zum Lösen wird die Wurzel zuerst auf einer Seite **isoliert**, dann **neutralisiert** und das Ergebnis (**Nullform**) bestimmt.
Abschließend erhält man die **Lösung** durch Testen der Ergebnisse.

Beispiel: $5 = \sqrt{x+1} + x$

Isolierung: $5 - \mathrm{x} = \sqrt{x+1}$

Neutralisierung:
$$(5-x)^2 = x + 1$$
$$25 - 10\mathrm{x} + x^2 = \mathrm{x} + 1$$
$$x^2 - 11x + 24 = 0$$
$$(x-8)\cdot(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 8 \vee x_2 = 3$$

Probe:
$$x_1 = 8:\quad 5 = \sqrt{8+1} + 8 = \sqrt{9} + 8 = 3 + 8 = 11 \neq 5$$
$$x_2 = 3:\quad 5 = \sqrt{3+1} + 3 = \sqrt{4} + 3 = 2 + 3 = 5$$

Lösung: $\mathbb{L} = \{3\}$

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $3 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 24 = 0$

2) $-0{,}5 \cdot x^2 + 2 \cdot x = -2{,}5$

3) $x \cdot (2 \cdot x - 20) = -32$

Wenden Sie je ein Verfahren an

II. Bestimmen Sie alle relevanten Eigenschaften der gegebenen Parabeln.

4) $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x - 3$

5) $g(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3$

6) $h(x) = 100 - 4 \cdot x^2$

✓Verlauf
✓Achsenschnittpunkte
✓Scheitelpunkt
✓Symmetrie

III. Bestimmen Sie die Lösung folgender Gleichungen.

7) $x^4 + 100 = 29 \cdot x^2$

8) $x^6 = 7 \cdot x^3 + 8$

9) $\mathrm{x} = \sqrt{x + 4} + 2$

10) $\sqrt{x} = \sqrt{x + 8} - 2$

BETRAGSFUNKTION I

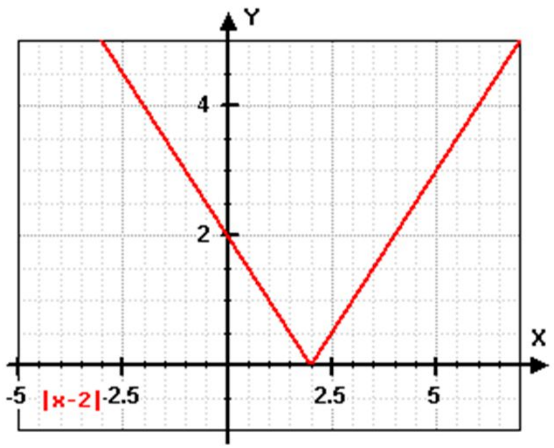
Da es sich bei dem Betrag einer Zahl um die reine **positive** Darstellung handelt, wird sie graphisch als sogenannte **V-Funktion** dargestellt.
Die Betragsstriche können weggelassen werden, in dem man den negativen Bereich mit einem **zusätzlichen Minus** vor dem Term versieht.

Beispiel:

$$f(x) = |x - 2|$$

$x < 2$: $$f(x) = -(x-2) = -x + 2$$

$x \geq 2$: $$f(x) = x - 2$$



Aufgrund der Knickstelle ist die Betragsfunktion an der Schnittstelle mit der X-Achse **nicht differenzierbar**, d.h. es kann keine Steigung berechnet werden.

(FREPL)-METHODIK

Beim Lösen einer beliebigen Gleichung kann abgesehen von der Fallunterscheidung (F) stets mit folgender Methodik gearbeitet werden:

- ✓ **F**allunterscheidung:
  Je nach Aufgabenstellung muss definiert werden, für welchen Bereich die Betrachtung gilt.
- ✓ **R**echnung:
  Die zugrundeliegende Gleichung wird mittels elementarer Umformungen gelöst.
- ✓ **E**rgebnis:
  Durch die Berechnungen ergeben sich eine oder auch mehrere Ergebnisse.
- ✓ **P**robe:
  Mittels Probe bzw. Abgleich mit dem Definitionsbereich wird der Ergebnisraum untersucht.
- ✓ **L**ösung:
  Aufgrund er Probe kann nun die Lösungsmenge angegeben werden.

BETRAGSFUNKTION II

Ungleichungen, die auf einer Betragsfunktion basieren, können auch mittels (FREPL)-Methodik gelöst werden.

Beispiel: $|2x-8|>6$

$x>4 \Rightarrow 2x-8>6$	$x \le 4 \Rightarrow -(2x-8)>6$	Fallunterscheidung
$2x-8>6 \Leftrightarrow 2x>14$ $\Rightarrow x>7$	$-2x+8>6 \Leftrightarrow -2x>-2$ $\Leftrightarrow x<1$	Rechnung
$x>7$	$x<1$	Ergebnis
$x=8 \Rightarrow \mid 2\cdot 8-8 \mid = 8>6$	$x=0 \Rightarrow \mid 2\cdot 0-8 \mid = \mid -8 \mid = 8>6$	Probe
$L=\{x \in R \mid x>7 \vee x<1\}$		Lösung

Durch Multiplikation / Division mit negativen Zahlen dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

AUFGABEN

I. Skizzieren Sie folgende drei Betragsfunktionen

1) $f(x) = \left| \frac{2}{3}x - 2 \right|$

2) $g(x) = | x^2 - 7x + 12 |$

3) $h(x) = | \cos(x) |$

II. Geben Sie den zugehörigen Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen an.

4) $| 3 - x | < 2$

5) $| 4x - 12 | > 8$

BRUCHUNGLEICHUNGEN

Ungleichungen, die auf einem **Bruch** basieren, können ebenfalls mittels „**FREPL**" gelöst werden. Da für gewöhnlich im ersten Rechenschritt mit dem **Nenner multipliziert** wird, muss an dieser Stelle die **Fallunterscheidung** genutzt werden, um die Multiplikation mit einem negativen Ausdruck mathematisch korrekt darstellen zu können.

Beispiel: $\frac{3x-2}{x-3} > 2 \qquad | \cdot (x-3)$

Umkehrung des Ungleichheitszeichen

$x > 3 \Rightarrow 3x-2 > 2\cdot(x-3)$	$x < 3 \Rightarrow 3x-2 < 2\cdot(x-3)$	Fallunterscheidung
$3x-2 > 2x-6$ $\Leftrightarrow x > -4$	$3x-2 < 2x-6$ $\Leftrightarrow x < -4$	Rechnung
$x > 3$	$x < -4$	Ergebnis
$x = 4 \Rightarrow \frac{3\cdot 4-2}{4-3} = \frac{10}{1} > 2$	$x = -5 \Rightarrow \frac{3\cdot(-5)-2}{(-5)-3} = \frac{-17}{-8} > 2$	Probe

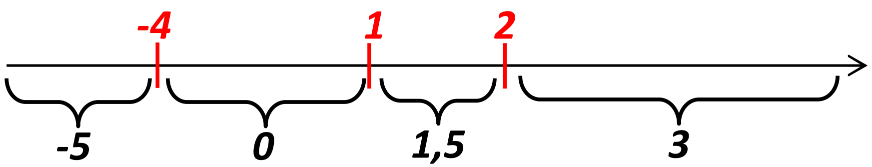
$$L = \{x \in R \mid x > 3 \vee x < -4\}$$ Lösung

POLYNOMUNGLEICHUNGEN

Handelt es sich um ein Polynom vom Grade >1, so werden im ersten Schritt die Nullstellen der Gleichung bestimmt. Diese gefundenen Ergebnisse repräsentieren die Intervallgrenzen der Ungleichung, wodurch mittels Probe einer Zahl aus dem Intervall die Lösungsmenge bestimmt werden kann (REPL-Methodik).

Beispiel: $x^3 + x^2 - 10x + 8 > 0$ *Polynomdivision liefert:*

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+4) > 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -4$$ Rechnung



Ergebnis

$$x = -5 : (-5-1)\cdot(-5-2)\cdot(-5+4) < 0 \quad \Rightarrow \textit{falsch}$$
$$x = 0 : (0-1)\cdot(0-2)\cdot(0+4) > 0 \quad \Rightarrow \textit{richtig}$$
$$x = 1{,}5 : (1{,}5-1)\cdot(1{,}5-2)\cdot(1{,}5+4) < 0 \quad \Rightarrow \textit{falsch}$$
$$x = 3 : (3-1)\cdot(3-2)\cdot(3+4) > 0 \quad \Rightarrow \textit{richtig}$$

Probe

$$L = \{x \in R \mid (x > -4 \wedge x < 1) \vee x > 2\}$$

Lösung

AUFGABEN

I. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben die Lösungsmenge an.

1) $\frac{2x-5}{4-2x} > \frac{1}{2}$

2) $\frac{2x+1}{1+x} \geq 3$

3) $\frac{x \cdot (3+2x)}{6-2x} > 1-x$

4) $\frac{2x^2-3}{2x+1} \geq x-1$

5) $\left|\frac{1}{2}x-3\right| < 5$

6) $x^2 - 8x > 20$

7) $x^3 + x + 6 > 4x^2$

8) $x^4 - x^2 \leq 25 \cdot (x-1) \cdot (x+1)$

9) $\frac{3x-2}{2-x} \leq -4$

10) $|1-2x| > \frac{1}{4}$