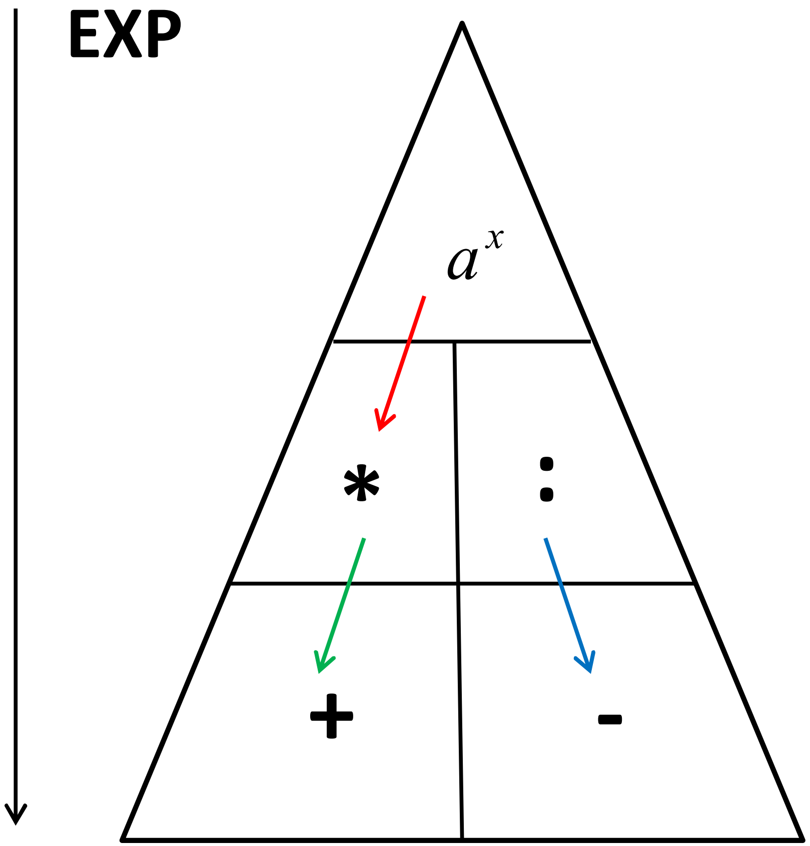
VORKURS

12.10.2021

POTENZGESETZE



$$\boxed{\left(x^3\right)^4 = x^{3\cdot 4} = x^{12}}$$

$$\boxed{x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5}$$

$$\boxed{\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2}$$

EIGENSCHAFTEN VON POTENZEN

Wichtige Zusammenhänge für die Potenzberechnung mit rationalem Exponenten:

<u>Polynom:</u>
Der höchste natürliche Exponent bestimmt den Grad des Polynoms $x^n + a \cdot x^{n-1} + \ldots + z \cdot x^0$

Beispiel: $x^5 - 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 12$ *Polynom vom Grade 5*

<u>Wurzel:</u>
Der Grad einer Wurzel steht immer im Nenner des Exponenten $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Beispiel: $\sqrt[3]{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

<u>Brüche:</u>
Ein negativer Exponent wird durch einen Positionswechsel positiv $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Beispiel: $\left(\frac{2}{x^2}\right)^{-2} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$

AUFGABEN ZU POTENZEN

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzgesetze.

1) $\sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^6 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}$

2) $\frac{(8u^2v^{-2}w)^4}{(81r^{-3}s^{-2}t^3)^2} : \frac{(3^4r^{-3}s^4t^3)^{-2}}{(2^4u^3v^{-4}w^{-2})^{-3}}$

3) $\frac{\sqrt[k]{a^{2-k}}}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^{3k+4}} \cdot \left(\frac{\sqrt[k]{a}}{\left(\sqrt[k]{a^2}\right)^{k+3}} \right)^{-2}$

4) $\sqrt{\frac{y^{-2} \cdot \left(x \cdot z^3\right)^5}{x^{-3} \cdot y^4 \cdot z^7}}$

5) $\frac{(5ab^{-3}c^2)^3}{(2^{-3}x^2y^0)^{-2}} : \frac{(4^{-1}a^{-2}b^0c^3)^2}{(25xy^{-3})^{-2}}$

6) $\left[\frac{\sqrt[2x]{n^{3x-2}}}{\sqrt[2x]{n^{4x-4}}} \cdot \left(\sqrt[2x]{n}\right)^{5x-2} \right]^3$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

a) $\sqrt{x^3} = 125$

b) $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^2 = 1024$

c) $\sqrt[3]{\frac{16}{x^2}} = 0{,}25$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

I) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 9}$

II) $g(x) = 5 \cdot \left(2x - 8\right)^{-2}$

III) $h(x) = \left(x^2 - 4\right)^2$

WACHSTUM & ZERFALL I

Handelt es sich um einen Vorgang, wodurch sich ein Grundwert kontinuierlich um einen bestimmten Prozentsatz erhöht bzw. reduziert, so existiert eine Exponentialfunktion

Der Wachstumsfaktor errechnet sich durch: $q = 1 \pm p$

Beispiel:
- Ein Kapital erhöht sich um 5%: $q = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$
- Ein Pool verliert 3% seines Inhalts: $q = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

Ist der Wachstumsfaktor $\mathrm{q} > 1$, dann handelt es sich um eine Wachstumsfunktion.
Für $0 < \mathrm{q} < 1$ eine Zerfallsfunktion.

Somit erhalten wir die allgemeine Wachstums- / Zerfallsfunktion:

$$\boxed{A(x) = A(0) \cdot q^x}$$

Hier entspricht $A(0)$ dem Startwert zum Zeitpunkt Null und x für die Zeitperioden.

BEISPIEL

1. Ein Kapital von 10.000€ wird mit 5% jährlich verzinst.

   Auf welchen Wert ist der Betrag nach 10 Jahren angestiegen?

   $A(0) = 10.000€$ $\qquad A(x) = 10.000€ \cdot 1{,}05^x$

   $q = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$

   $x = 10$ $\qquad A(10) = 10.000€ \cdot 1{,}05^{10} = 16.288{,}95€$

2. Ein Pool verliert aufgrund eines Lochs pro Tag 3% seines Wasserinhalts.
   Zu Beginn der Untersuchung befanden sich $50m^3$.

   Wie viel Liter sind nach 6 Wochen noch vorhanden

   $A(0) = 50m^3$ $\qquad A(x) = 50m^3 \cdot 0{,}97^x$

   $q = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

   $x = 6 \cdot 7 = 42$ $\qquad A(42) = 50m^3 \cdot 0{,}97^{42} = 13{,}91m^3 = 13.911l$

WACHSTUM & ZERFALL II

Stimmt die Periode mit der Zeitvariable nicht überein, d.h. handelt es sich z.B. um eine unterjährige Verzinsung oder um eine Halbwertszeit, so muss die Variable x so angepasst werden.

Ein Kapital wird vierteljährlich mit 5% verzinst, wobei die Einheit von x Jahre ist.

$$A(x) = A(0) \cdot 1{,}05^{4 \cdot x}$$ *In einem Jahr tritt 4 mal die Verzinsung ein*

Die Halbwertszeit eines radioaktiven Stoffs beträgt 500 Jahre (x=Jahre).

$$A(x) = A(0) \cdot 0{,}5^{\frac{1}{500} \cdot x}$$ *Erst nach 500 Jahren halbiert sich die Menge*

AUFGABEN

1) Ein Kapital von 5000 EURO wird bei einer halbjährlichen Verzinsung zu 4% sieben Jahre lang auf einer Bank angelegt.

   a) Wie hoch ist der Kontostand nach den 10 Jahren?
   b) Wie hoch wäre der Zinssatz bei einer jährlichen Verzinsung?
   c) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion und skizzieren den Graphen.

2) Im Herbst reduziert sich die Menge an Blättern eines Baumes im Durchschnitt täglich um 4%.
   Zu Beginn der Untersuchung am 1. September befanden sich 10^9 Blätter an einer Buche.

   a) Wie viel Blätter sind am 01.12. noch vorhanden?
   b) Nach wie vielen Tagen sind weniger als 50% in dem Teich?
   c) Erstellen Sie die Wachstumsfunktion und skizzieren den Graphen.

EULERSCHE ZAHL

Die Eulersche Zahl ($e = 2{,}71828 \approx 3$) spielt gerade in der Analysis eine große Rolle und wird aufgrund der Funktionseigenschaften häufig auch für wissenschaftliche Untersuchungen genutzt.

$$f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$f(x) = e^x \qquad \mathbb{D} = x \in \mathbb{R}$$

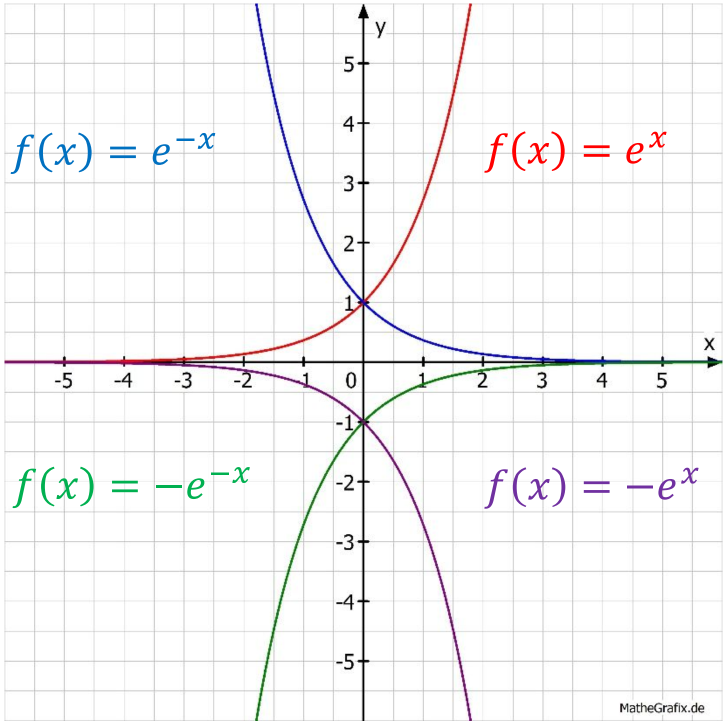
$$\mathbb{W} = y \in \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = e^{g(x)}$$

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$f(x) = e^{2-x}$$

$$f'(x) = e^{2-3x} \cdot (2-3x)' = -3 \cdot e^{2-x}$$



DEFINITION EINES LOGARITHMUS

Der Logarithmus dient zur Berechnung eines variablen Ausdrucks im Exponenten.

Es gilt: $$\boxed{a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a}}$$

<u>10er-Logarithmus:</u>

Ein Logarithmus ohne Angabe einer Basis ist immer zur Basis 10. $\log x = \log_{10} x$

Beispiel: $\log 10.000 = \log_{10} 10^4 = 4$

<u>Logarithmus naturalis:</u>

Der Logarithmus zur Basis *e* ist der natürliche Logarithmus. $\ln x = \log_e x$

Beispiel: $\ln 42 = \log_e 42 = 3{,}737$

<u>Logarithmus dualis:</u>

Ein Logarithmus zur Basis 2 nennt man dualis. $ld(x) = \log_2 x$

Beispiel: $ld(32) = \log_2 2^5 = 5$

LOGARITHMUS NATURALIS

Die Gegenoperation von e^x ist der Logarithmus naturalis $ln(x)$
Den Graphen der Funktion erhält man über die Umkehrfunktion und somit grafisch gesehen durch die Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden $w(x) = x$

$$f(x) = -ln(x) = ln(x)^{-1} = ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

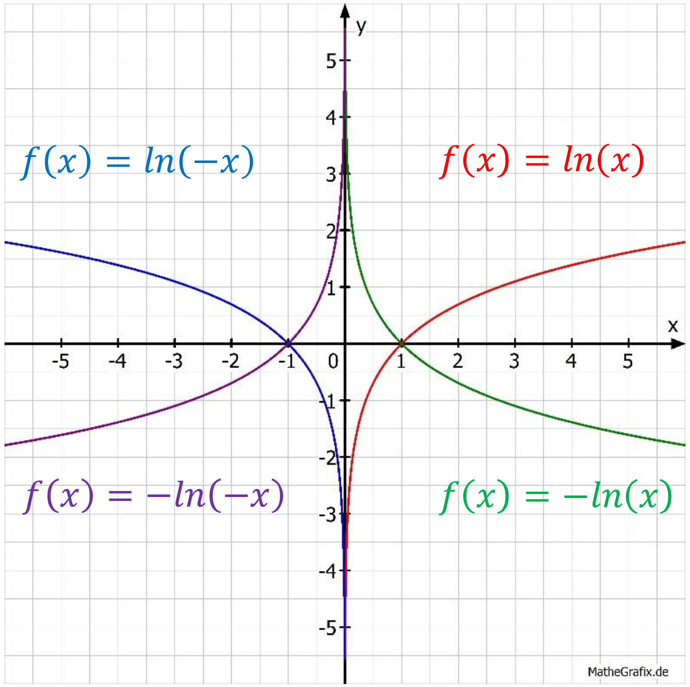
$$f(x) = ln(x) \qquad \mathbb{D} = x \in \mathbb{R}^+$$
$$\mathbb{W} = y \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = ln\big(g(x)\big)$$

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

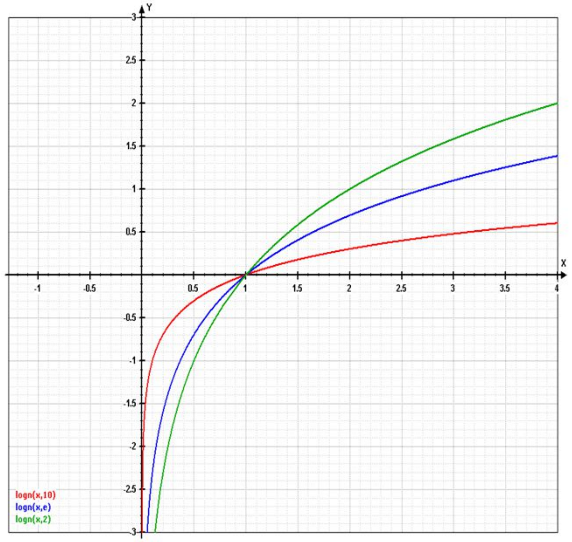
$$f(x) = ln(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

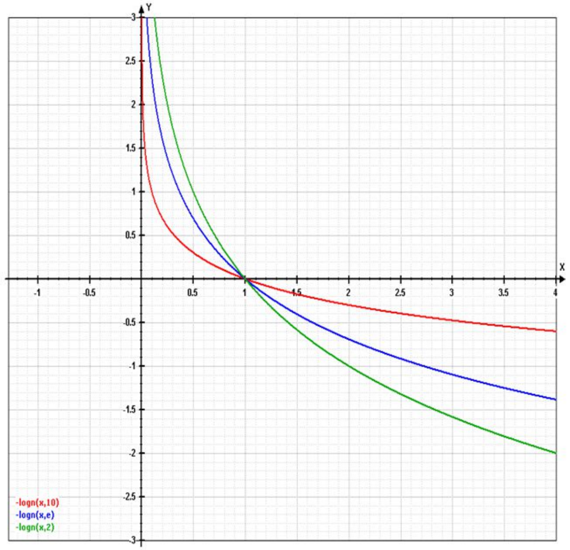


FUNKTIONSGRAPHEN

Positiver Logarithmus:



Negativer Logarithmus:



- ➢Ausschließlich positive Steigung
- ➢Ausschließlich negative Steigung

- ➢Gemeinsamer Punkt: (1/0)
- ➢Je größer die Basis, desto flacher ab x=1
- ➢Je größer die Basis, desto steiler vor x=1

DEFINITIONS-/ WERTEBEREICH

Definitionsbereich:
Wie man schon durch die Funktionsgraphen erkennen kann, darf man einen Logarithmus nur von positiven Zahlen ziehen.

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} = \mathbb{R}^+$, da $10^x > 0 \Leftrightarrow \log(>0) = x$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} \ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = y \\ \left(x^2 - 5x + 6\right) = (x-3)\cdot(x-2) > 0 \end{array}\right\} \quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | x > 3 \vee x < 2\}$$

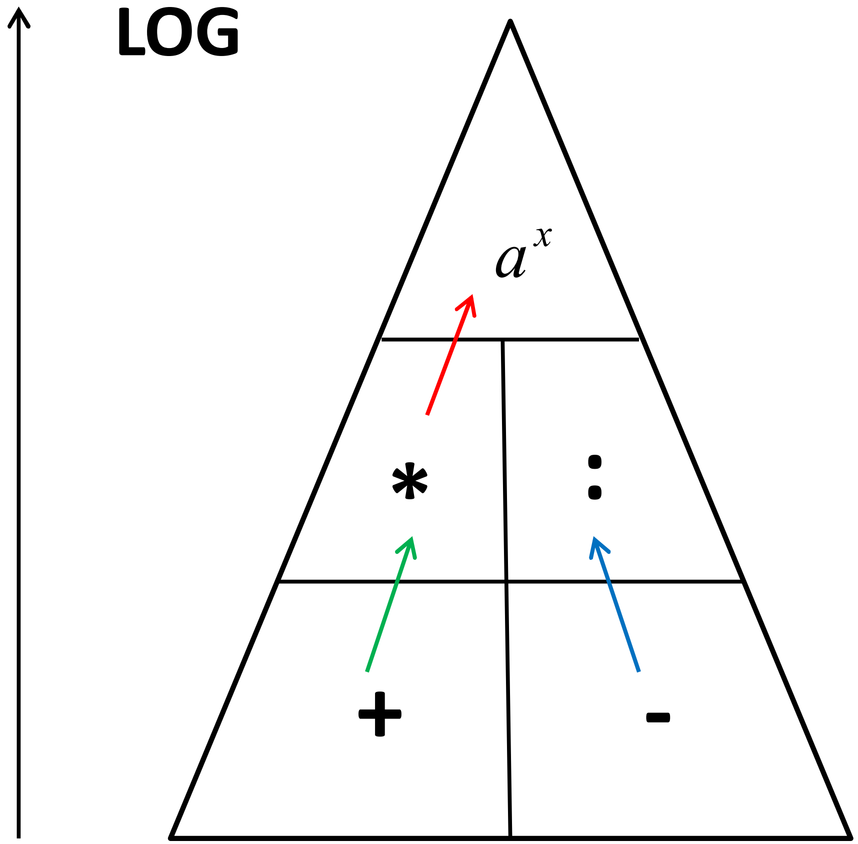
Wertebereich:
Aufgrund der Funktionsgraphen ist ersichtlich, dass ein Logarithmus alle reellen Werte annehmen kann.

$\mathbb{W} = y \in \mathbb{R}$, da $10^{(>0)} > 1 \wedge 10^{(\leq 0)} \leq 1$ gilt.

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} 12 - 3 \cdot \ln(5x - 3) = y \\ 12 - 3 \cdot \ln]0; \infty[= y \\ 12 - 3 \cdot]-\infty; \infty[\Rightarrow \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \mathbb{W} = y \in \mathbb{R}$$

LOGARITHMUS-GESETZE



$$\boxed{3 \cdot \log 4 = \log 4^3 = \log 64}$$

$$\boxed{\log 2 + \log 3 = \log 2 \cdot 3 = \log 6}$$

$$\boxed{\log 8 - \log 2 = \log \frac{8}{2} = \log 4}$$

AUFGABEN

1) Ein Kapital von 2000 EURO wird bei einer vierteljährlichen Verzinsung zu 2% zehn Jahre lang auf eine Bank eingezahlt.
   a) Wie hoch ist der Kontostand nach den 10 Jahren?
   b) Wie hoch wäre der Zinssatz bei einer jährlichen Verzinsung?
   c) Wie lange lag das Geld auf der Bank bei einem Endbetrag von 9.750,88 EURO?

2) Ein Gartenteich mit einem Inhalt von 1000 Litern hat ein kleines Loch, wodurch er wöchentlich 5% Inhalt verliert.
   a) Wie viel cm³ sind nach einem Jahr noch vorhanden?
   b) Nach wie vielen Tagen sind weniger als 50% in dem Teich?

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

3) $5 \cdot \log(2x) + 4 \cdot \log(\sqrt{0{,}5x}) - 0{,}5 \cdot \log(16x^4) - 2 \cdot \log(0{,}25)$

4) $2 \cdot \ln(3a^2) - 6 \cdot \ln(\sqrt[3]{2a^4}) + \frac{1}{3} \cdot \ln(27(a^2)^6) - 4 \cdot \ln\left(\frac{2}{a}\right)$

OPERATION UND GEGENOPERATION

Die zu einem Logarithmusausdruck zugehörige Gegenoperation ist stets ein Exponentialoperator, wodurch sich beide neutralisieren.
Die Zusammenhänge ergeben sich wie folgt:

$$\boxed{\log 10^{\Psi} = 10^{\log\Psi} = \Psi} \quad \boxed{\ln e^{\Omega} = e^{\ln\Omega} = \Omega} \quad \boxed{ld\, 2^{\Theta} = 2^{ld\Theta} = \Theta}$$

Aufgrund dieser Vereinfachungen, muss die zugehörige Basis bzw. der Exponent im ersten Schritt mittels exponentieller/ logarithmischer Gesetze passend umgeformt werden.

Beispiel:

$$\log\frac{1}{1000} - 4\cdot\ln\sqrt{e} + \frac{1}{2}\cdot ld16 + 0{,}1^{\log 0{,}25} + \left(\frac{1}{e^2}\right)^{\ln\frac{1}{3}} - 8^{ld3}$$

$$\log 10^{-3} - 4\cdot\ln e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot ld2^4 + 10^{(-1)\cdot\log\frac{1}{4}} + e^{(-2)\cdot\ln\frac{1}{3}} - 2^{3\cdot ld3}$$

$$-3 - 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 3^3 = -3 - 2 + 2 + 4 + 9 - 27 = -17$$

AUFGABEN

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

1) $\frac{1}{6} \cdot ld2^3 + 3 \cdot e^{2 \cdot \ln 0{,}5} - \log \sqrt{10} + 4 \cdot (2^{4 \cdot ld\frac{1}{2}} - 8 \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{e}}) - 4 \cdot 10^{\frac{1}{4} \cdot \log 256}$

2) $\frac{2}{3} \cdot (\log 1\,000 - \frac{1}{2}) - \frac{2}{e^{\ln 0{,}5}} + 2^{3 + ld3} - (10^2)^{\log 3} + \ln \left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \right)^2 - 4 \cdot ld\sqrt{2}$

3) $\left(\frac{1}{8} \right)^{ld2} - 6 \ln \frac{1}{\sqrt[3]{e}} + \frac{1}{4} ld64 - \frac{1}{2} \log \frac{1}{1000} + \sqrt[3]{e}^{\ln 27}$

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)^{\ln \frac{1}{9}} + 100^{\log \frac{1}{2^{-2}}} - 16^{\frac{1}{2} ld4} + 2 \log 0{,}001 - 3 \ln \frac{1}{e^3} + \frac{1}{4} ld \frac{1}{256}$

5) $6 \ln \sqrt[3]{e^2} - \frac{8}{e^{2 \ln 0{,}5}} - (\frac{1}{2} e^{\ln 3^2} - \ln \frac{1}{\sqrt{e}}) + \frac{8}{\ln e^2} + e^{2 \ln 3} - 2 \cdot (e^{2 \ln 2} + \ln \frac{1}{\sqrt[4]{e}})$

DIE LOGARITHMEN-GLEICHUNG

Sofern eine reine Logarithmengleichung existiert kann man diese mit der folgenden Methodik lösen, wobei primäres Ziel eine Isolierung des Logarithmus auf beiden Seiten der Gleichung ist:

<u>Methodik:</u>

1. Die Faktoren vor dem Logarithmus in den Exponenten verschieben.
2. Alle positiven Terme über den Bruchstrich, alle negativen darunter schreiben.
3. Streichen der Logarithmen auf beiden Seiten.
4. Lösen der Gleichung.

Beispiel: $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log 2 - \frac{1}{2} \cdot \log x^4 = 2 \cdot \log 4 - \log(x-2)$

$$\log x^2 - \log 2^3 - \log\left(x^4\right)^{\frac{1}{2}} = \log 4^2 - \log(x-2)$$

$$\log \frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \log \frac{16}{x-2}$$

$$\frac{x^2}{8 \cdot x^2} = \frac{16}{x-2} \Leftrightarrow x - 2 = 16 \cdot 8 = 128 \Leftrightarrow x = 130$$

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $3 \cdot \log x - 4 \cdot \log \frac{2}{x} - \frac{1}{3} \cdot \log\left(x^2\right)^6 = \frac{2}{3} \cdot \log 27 + \frac{1}{2} \cdot \log x^4 - 2 \cdot \log 6$

2) $3 \cdot \ln 4 - 0{,}5 \cdot \ln \frac{16}{x^4} + 2 \cdot \ln 8 = 1{,}5 \cdot \ln x^4 - 8 \cdot \ln \sqrt[4]{\frac{1}{x}} - 2 \cdot \ln \frac{1}{4}$

II. Berechnen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich.

3) $f(x) = \frac{2}{5} \cdot \ln\left(4x - 3 - x^2\right)$ 4) $g(x) = 42 + \log\left(2 - \sqrt{x-2}\right)$ 5) $h(x) = \frac{42}{ld\left(3 \cdot x + 6\right)}$

III. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich.

6) $\log \frac{1}{1000} - 4 \ln \sqrt{e} + 16^{ld \sqrt{3}} + 2e^{2 \cdot \ln 3} - \left(10^{\log 12} + 2ld\,4\right)$

7) $6 \cdot \log \sqrt[3]{10} + 4^{ld\,3} - 2 \cdot \ln \frac{1}{e^2} - 0{,}2 \cdot ld\left(32^5\right) + \left(\frac{1}{100}\right)^{\log \frac{1}{3}} - \left(\sqrt{e}\right)^{\ln\left(5^4\right)}$