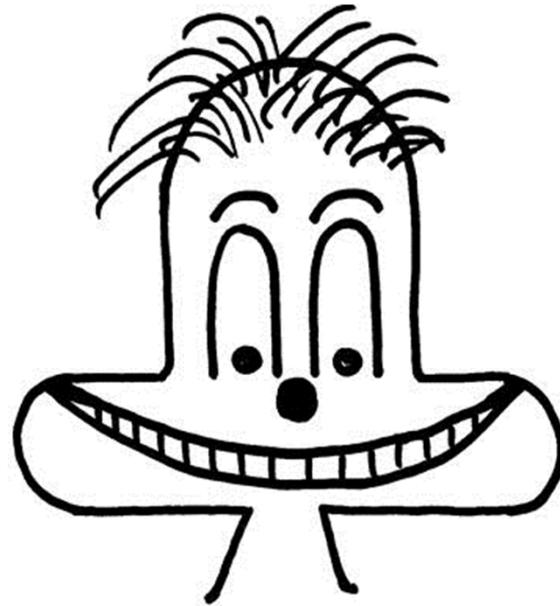


# Mathematik Vorkurs



11.10.2021 – 15.10.2021

# Vorkurs Mathematik 2021



Torsten Schreiber

# Mathematik ist begreifbar...



[www.mathematik-guru.de](http://www.mathematik-guru.de)

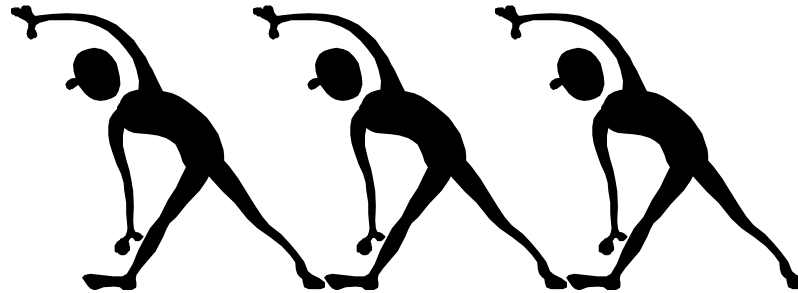
... und macht sogar Spaß!



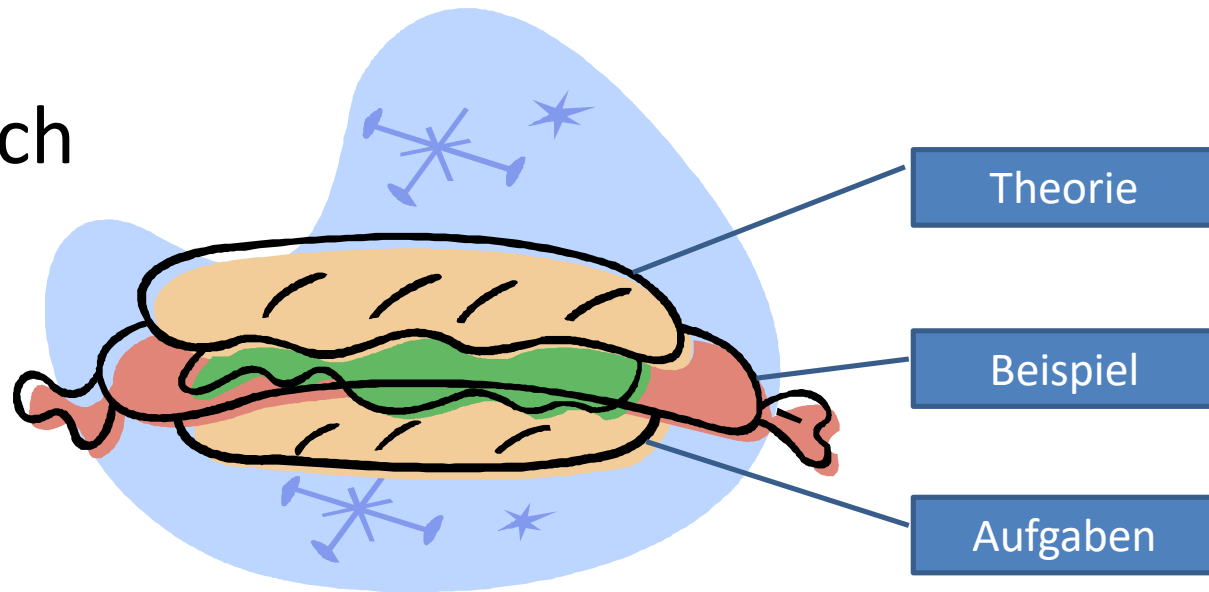
[schreiber@mathematik-guru.de](mailto:schreiber@mathematik-guru.de)

# Methodik meiner Veranstaltung

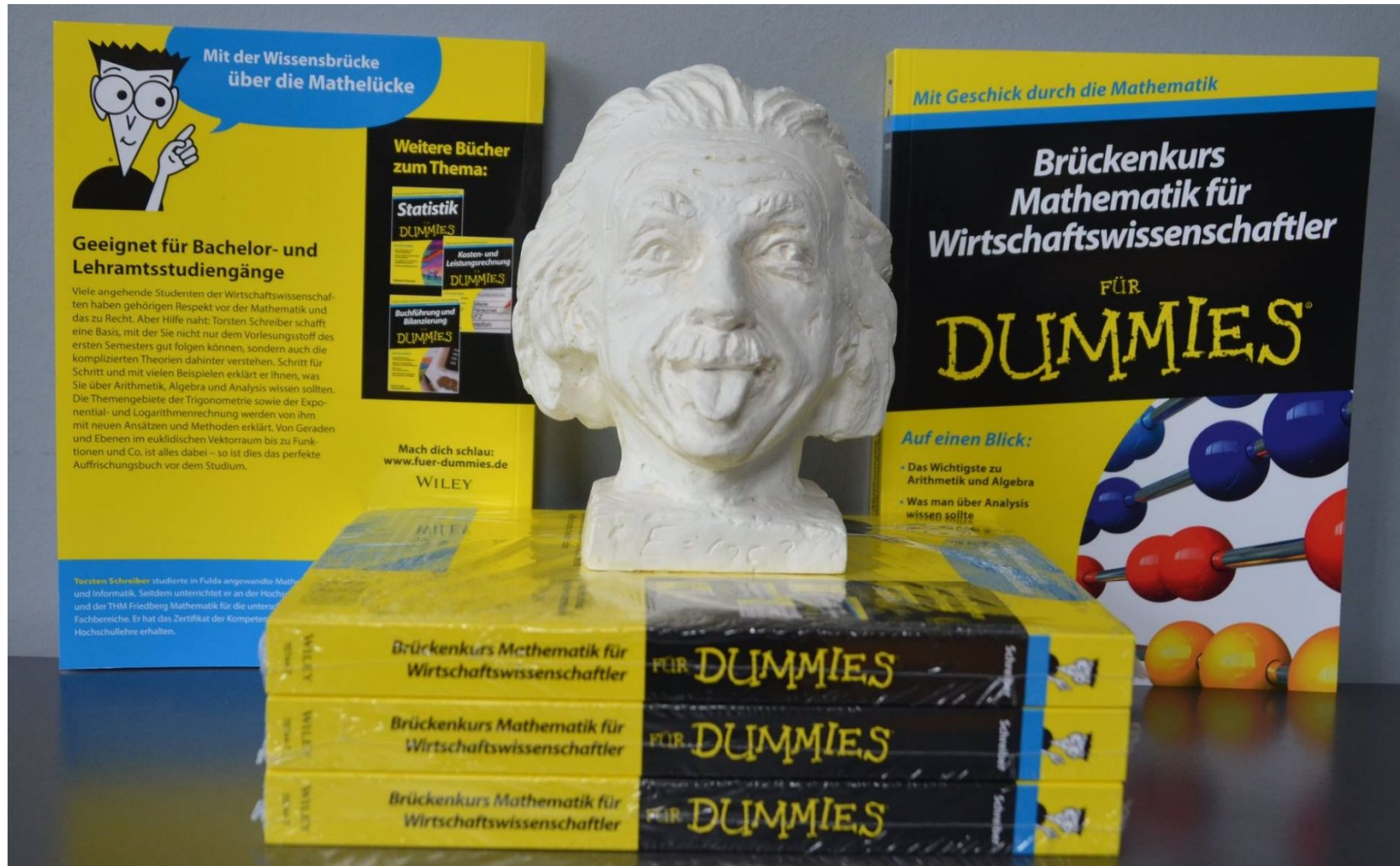
- WarmUp



- n-Sandwich



# Mein Buch



ISBN: 978-3527707447

# Themengebiete des Vorkurses

## Mathematik

1. **Mengen**  
*Grundlagen / Gesetze und Junktoren / Zahlenmengen*
2. **Bruchrechnung**  
*Rechengesetze / Methodiken / leichte Gleichungen / Doppelbruch*
3. **Rechnen mit Potenzen / Wurzeln**  
*ganz- und gebrochen rationaler Exponent*
4. **Exponential- / Logarithmenrechnung**  
*Rechengesetze und graphische Darstellung*
5. **Gleichung / Ungleichungen mit einer Unbekannten**  
*Rechnung und Grafik*
6. **Gleichung / Ungleichungen mit 2 Unbekannten**  
*Additions-, Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren; grafische Lösung*
7. **(Bi)-quadratische Gleichung**  
*quadratische Ergänzung, p-q-Formel, Satz von Vieta*

## Statistik

1. **Einführung Statistik**  
*Merkmalstypen, Häufigkeiten (relativ, absolut)*
2. **Maßzahlen der Statistik**  
*Mittelwerte, Modus, Median und Quantile*
3. **Häufigkeitsverteilung**  
*relative und absolute (Summen)Häufigkeiten*
4. **Wahrscheinlichkeitsrechnung**  
*Grundbegriffe, Kombinatorik, Laplace, Bayes*
5. **Wahrscheinlichkeitsverteilung**  
*Binomial-, Normal- und hypergeometrische Verteilung*

1. **Mengenlehre (8 Punkte):**

Gegeben sind die Menge A der natürlichen Zahlen (größer 7 und kleiner gleich 22), die durch 2 oder 3 oder auch durch 5 teilbar sind und die Menge B der nicht durch zwei teilbare Zahlen im Intervall von ]6; 24]. Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung und 2 mal Eigenschaften):

a)  $A \cap B$

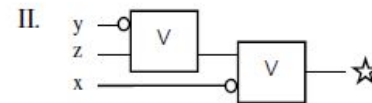
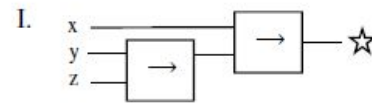
b)  $A \cup B$

c)  $A \setminus B$

d)  $B \setminus A$

2. **Aussagenlogik (8 Punkte):**

Geben Sie für die folgenden beiden Schaltungen die zugehörigen Aussageformeln an und zeigen Sie, dass beide Ausdrücke äquivalent zueinander sind (Begründung).



3. **Bruchrechnung (8 Punkte):**

a)  $\left[ 2\frac{1}{3} - 1,5 \cdot \left( 3 - \frac{2}{x} \right) + \frac{7}{10} + \frac{3}{x} \cdot (0,5x - 1) \right] : \frac{1}{3}$

b) 
$$\frac{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4(a - 2b)^2}}{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 4ab + 4b^2}}$$

4. **Komplexe Zahlen (8 Punkte):**

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden komplexen Gleichungen und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form  $z = a + bi$  an. Bestimmen Sie bei Aufgabe b) zusätzlich noch den Betrag und das Argument.

a)  $z = \frac{5i \cdot (3 + 9i)}{(3i + 1)^2} - \frac{(4i - 3)^2}{(1 - 3i)}$

b)  $z^2 - (6i - 4) \cdot z = 12i + 9$

5. **Arithmetik (8 Punkte):**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a)  $-\left[ \left( 2x - \frac{1}{2}z \right)^4 - \left( \frac{1}{4}z^2 + 12x^2 \right)^2 \right] - 16x^3 \cdot (8x + z)$

b)  $14 \cdot \left[ x - \left( 2y - 2 \cdot (x - (2z + 3y)) - 4 \cdot (2y + z) \right) \right]$



6. **Exponential-/Logarithmusrechnung (16 Punkte):**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke weitestgehend:

$$\text{a) } \frac{2 \cdot (27x^2y^3z^{-2})^3}{(8x^2y^{-5}z^3)^{-2}} \cdot \frac{3 \cdot (0,25xy^{-5}z^{-3})^{-3}}{(9^{-1}x^{-3}y^4z^2)^4} \qquad \text{b) } \frac{\sqrt[4n]{a^{8n-3}}}{\sqrt[2n]{a^{5n-2}}} \cdot \frac{\sqrt[n]{(\sqrt{a})^{3n+2}}}{\sqrt[2n]{\sqrt{a^{3+7n}}}}$$

$$\text{c) } 4^{ld3} + \log 0,001 + 2 \cdot \sqrt[3]{e^{-ln8}} + \frac{1}{4} \cdot ld \frac{1}{256} - \left(\frac{1}{100}\right)^{\log 0,25} - 3 \cdot \ln \sqrt[3]{\frac{1}{e^8}}$$

$$\text{d) } 3 \cdot \log x - \log 2 + 3 \cdot (\log 2 - \log x^2) = 2 \cdot \log \frac{1}{4} + 4 \cdot (\log x + 0,5 \cdot \log \sqrt{2}) - 2 \cdot \log x^4$$

7. **Parabelfunktion (8 Punkte):**

Berechnen Sie den Scheitelpunkt, die Schnittpunkte mit beiden Achsen und beschreiben den Verlauf der Parabeln.

$$\text{a) } f(x) = -4x^2 + 8x + 32 \qquad \text{b) } g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 5x + 18$$

8. **Ungleichungen (8 Punkte):**

Berechnen Sie den Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen.

$$\text{a) } 3 \cdot |8 - 2x| \leq 36 \qquad \text{b) } \frac{(x-2)^2}{x-8} > 6 + x$$

9. **Gleichungen mit einer Unbekannten (8 Punkte):**

Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie – sofern erforderlich – den Definitionsbereich an.

$$\text{a) } x^5 \cdot (x^5 - 33) = -32 \qquad \text{b) } 2x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) + 8x^2 = 16 + 2x \cdot (x + 2)$$

10. **Lineare Gleichungssysteme (12 Punkte):**

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 0,5x + 5 = -6y \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} -x + 2y + 3z = 7 \\ x + 3y - 3z = -2 \\ 2x - y + 2z = 5 \end{cases} \qquad \text{c) } \begin{cases} 0,75x + y = 1 \\ 2x - 10 = y \end{cases}$$

beliebig

Gauß-Verfahren

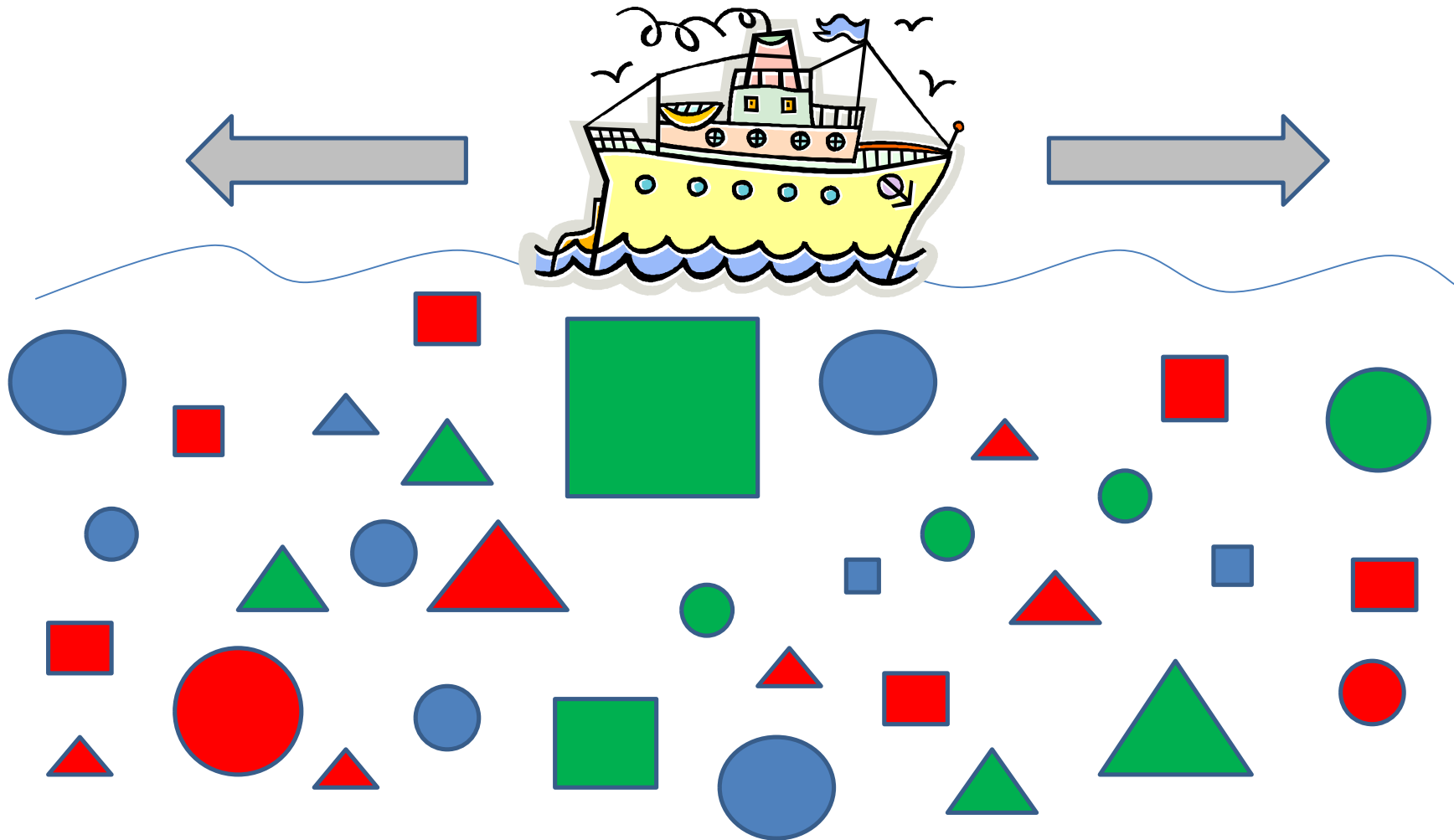
beliebig

11. **Trigonometrie (6 Punkte):**

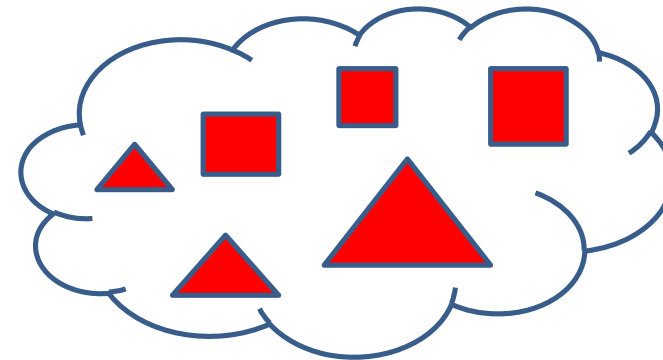
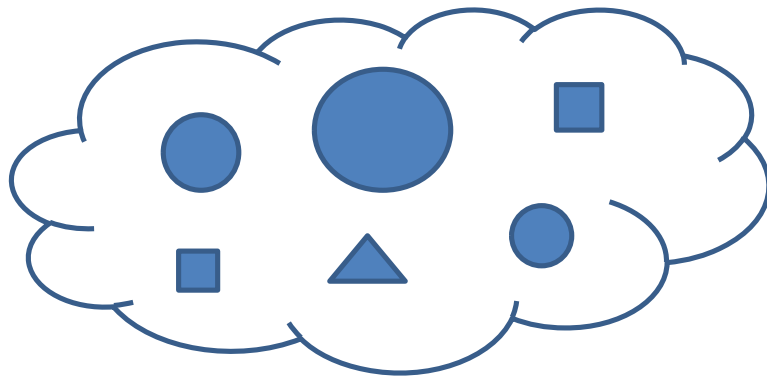
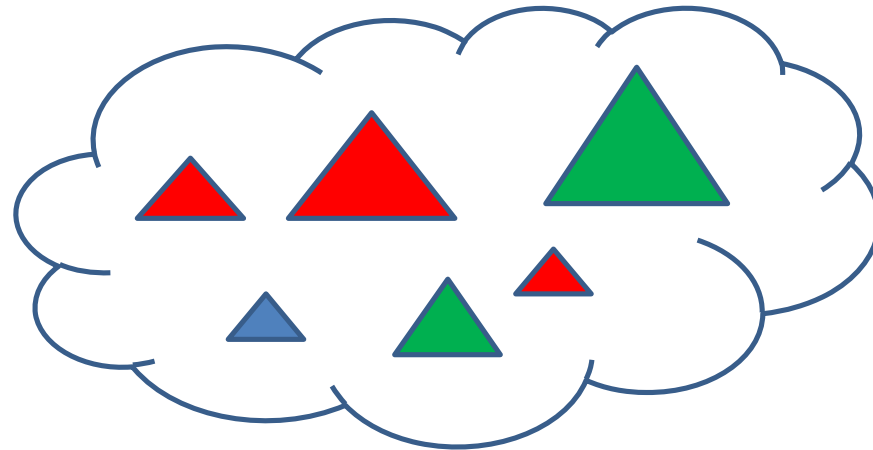
Gegeben sei die Funktion mit  $f(x) = -2,5 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x - 5,5\pi\right) + 3,5$ .

Bestimmen und beweisen Sie die Periode, Symmetrie und Amplituden(Wertebereich) von  $f(x)$ .

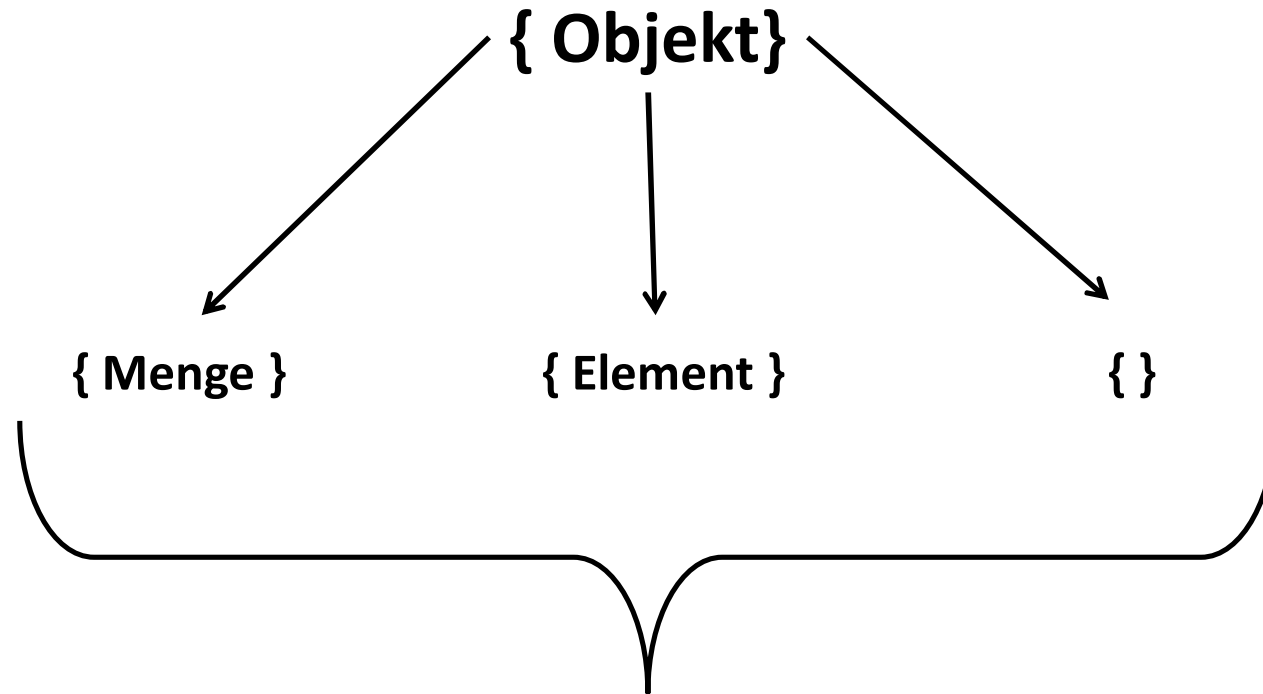
# URKNALL DER MATHEMATIK



# GRUPPEN VON MENGEN



# MENGENDEFINITION



Reihenfolge spielt keine Rolle

Unterscheidbarkeit der Objekte (redundanzfrei)

# INTERVALLE

Eine Variable (Objekt) **ist Element** ( $\in$ ) aus einem Zahlenbereich zwischen oder auch innerhalb zweier Grenzen.

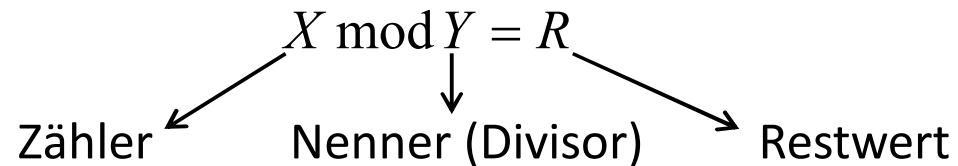
Dabei spielen vor allem die Intervallgrenzen eine wichtige Rolle, ob diese zu dem definierten Bereich gehören oder nicht.

- Offenes Intervall: beide Grenzen gehören nicht dazu  
 $x \in ]a; b[ = x \in (a; b) \leftrightarrow x > a \wedge x < b$
- Geschlossenes Intervall: beide Grenzen gehören dazu  
 $x \in [a; b] \leftrightarrow x \geq a \wedge x \leq b$
- Halboffenes Intervall: jeweils eine Grenze gehört dazu bzw. nicht dazu.  
 $x \in ]a; b] = x \in (a; b] \leftrightarrow x > a \wedge x \leq b$   
 $x \in [a; b[ = x \in [a; b) \leftrightarrow x \geq a \wedge x < b$

Merksatz: *Zeigt die eckige Klammer nach außen,  
So ist die Grenze draußen,  
Zeigt sie nach innen,  
So ist diese mit drinnen*

# MODULO

Die Modulo-Funktion entspricht einem Restwertoperator, d.h. bei einer ganzzahligen Division wird der Rest als Ergebnis dargestellt.



Beispiel:

$$5 \bmod 2 = 1, \text{ denn } 5 \div 2 = 2 \text{ Rest } 1$$

$$23 \bmod 5 = 3, \text{ denn } 23 \div 5 = 4 \text{ Rest } 3$$

Teilbarkeit: Restwert muss 0 ergeben

$$x \bmod 7 = 0 \quad x \text{ ist teilbar durch } 7$$

$$x \bmod 2 \neq 0 \quad x \text{ ist nicht durch } 2 \text{ teilbar (ungerade Zahl)}$$

# DARSTELLUNGSFORMEN I

Bei der Definition einer Menge mittels deren **Eigenschaften**, muss im ersten Teil stets der Bereich gewählt werden, der als **Basis (Welt)** verwendet werden soll. Dieser ist so **klein als möglich** zu definieren.

Anschließend erfolgt die Beschreibung einer **Bedingung**, durch die die Zahlen der Lösungsmenge aus der Welt **herausgefiltert** werden können.

$$M = \{x \in \underbrace{\text{Grundmenge}}_{\text{Welt}} \mid \underbrace{\text{Formel}(a) = \text{Formel}(b)}_{\text{Bedingung}}\}$$

Menge

Menge: Großbuchstabe für die Lösungsmenge

Welt: Variablendefinition aus der Grundmenge

Bedingung: Mathematische Formel bzw. verbaler Ausdruck

# DARSTELLUNGSFORMEN II

1) Aufzählung:

Die einzelnen Objekte werden innerhalb der Menge aufgeführt, wobei Platzhalter in Form von „...“ dargestellt werden.

2) Einschluss:

Basierend auf einer beliebigen Ausgangsmenge wird ein Gesetz definiert, das die enthaltenden Objekte beschreibt.

3) Ausschluss:

Aus einer Grundzahlenmenge werden die Objekte definiert, die nicht enthalten sein dürfen.

Beispiel:

*Mengen der geraden, natürlichen Zahlen*

$$1) G_{\mathbb{N}} = \{2; 4; 6; 8; \dots\}$$

$$2) G_{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$$

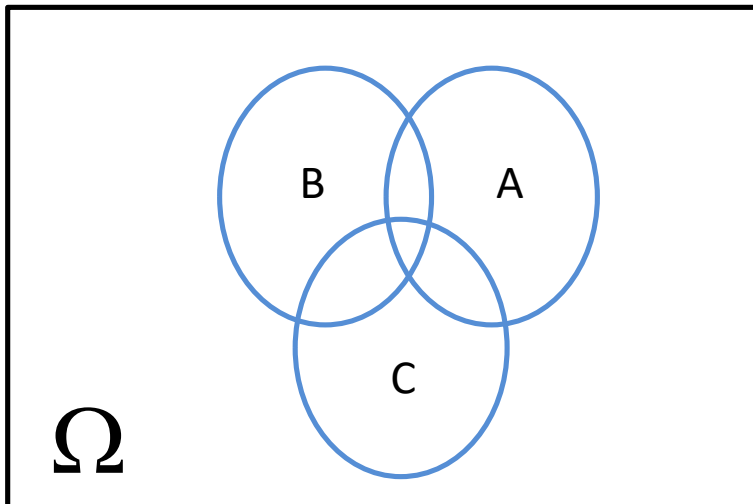
$$3) G_{\mathbb{N}} = x \in \mathbb{N} \setminus \{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 \neq 0\}$$



# DARSTELLUNGSFORMEN III

## 4) Vennsches Diagramm:

Es werden die existierenden Mengen mittels Kreise in die Welt (Kasten) eingetragen.



Die dadurch entstehenden Untermengen sind:

- Vereinigungsmenge (ODER-Verknüpfung)
- Schnittmenge (UND-Verknüpfung)

# AUFGABEN

Lösen Sie die folgenden Übungen, in dem Sie je einmal die Mengen via Aufzählung und einmal mittels Eigenschaften definieren.

- 1) Beschreiben Sie alle nicht durch sieben teilbaren natürlichen Zahlen.
- 2) Definieren Sie alle ganzen Zahlen größer  $-10$ , die durch vier oder durch 5 teilbar sind.
- 3) Geben Sie alle positiven ganzen Zahlen kleiner gleich 100 an, die durch drei und durch fünf teilbar sind.
- 4) Nennen Sie alle natürlichen Zahlen Zahlen zwischen 4 und 42, die durch 2 aber nicht durch 3 teilbar sind.
- 5) Welche ganzen Zahlen innerhalb von  $-10$  und 42 sind nicht durch 7, jedoch durch 3 teilbar.
- 6) Bauen Sie die Beschreibung einer Menge zusammen, die aus einem zweidimensionalen Tupel natürlicher Zahlen besteht, wobei die erste Zahl um 2 kleiner als die zweite sein soll und geben Sie 4 Beispieletupel an.

Skizzieren Sie den Graphen?

# TEILMENGE / INKLUSION

Sofern die Ausgangsmenge ein Teil oder komplett innerhalb einer weiteren Menge vorhanden ist, so spricht man von einer Teilmengenbeziehung bzw. von einer Inklusion.

## Methodik:

1) Streichen der Mengenklammer bei der Ausgangsmenge

2) Jedes Objekt muss bzgl. Wert und Format in der 2. Menge auftauchen

$$\{a\} \subseteq \textit{Alphabet}$$



$$a \in \textit{Alphabet}$$

## Eigenschaften:

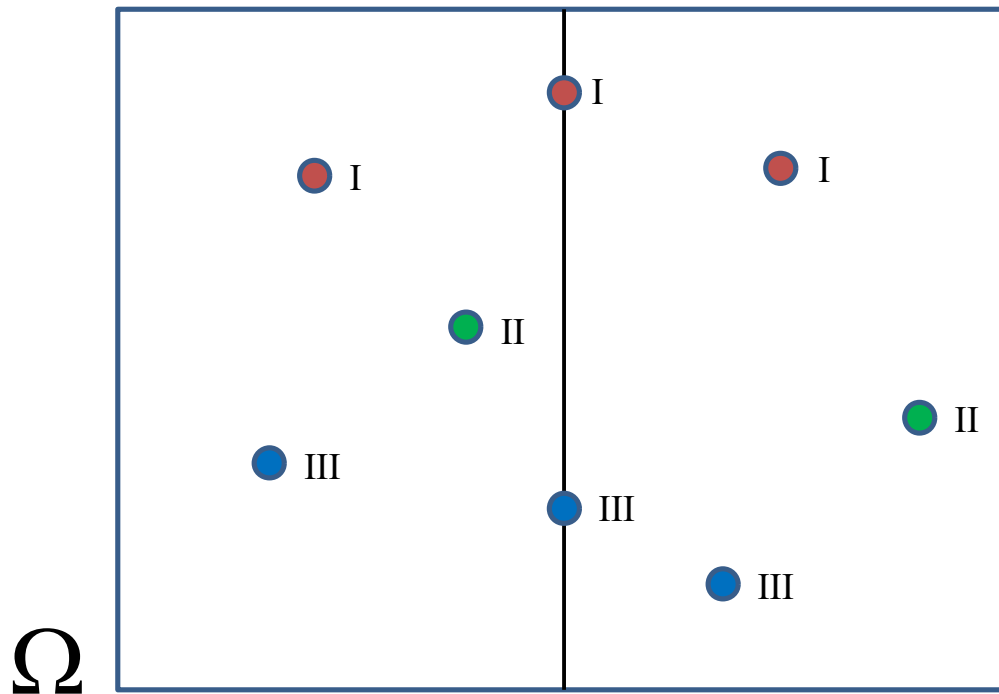
✓ Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge  $\{ \} \subseteq A$

✓ **reflexiv:** Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst  $A \subseteq A$

✓ **transitiv:** logische Schlussfolgerungen sind zugelassen  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

✓ **antisymmetrie:** Beweisprinzip der Extensionalität  $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$

# SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN



## ✓ Symmetrie (I):

Zu jedem Punkt gehört ein Spiegelpunkt.

## ✓ Asymmetrie (I I):

Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt.

## ✓ Antisymmetrie (I I I):

Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt aber mindestens ein Punkt auf der Spiegelachse.

Sind mehrere Symmetrievarianten vorhanden, so kann keinerlei Aussage über das Symmetrieverhalten getroffen werden.

# JUNKTOREN

Junktoren entsprechen Verbindungen / Operatoren die beliebige Objekte miteinander verknüpfen können (Arithmetik: „+“, „-“, „\*“, „:“).

UND ( $A \cap B$ ):

Das Objekt der Lösung gehört **gleichzeitig** zu den Menge A und B. (*Durchschnitt*)

Beispiel: Primzahl  $\cap$  gerade, natürliche Zahl =  $\{2\}$

ODER ( $A \cup B$ ):

Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A **oder** B oder zu A **und** B. (*Vereinigung*)

Beispiel: ungerade Zahl  $\cup$  gerade, natürliche Zahl =  $\mathbb{N}$

NICHT ( $A \setminus B$ ) :

Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A aber **nicht** zu B. (*Differenz*)

Beispiel: natürliche Zahl  $\setminus$  gerade, natürliche Zahl = ungerade Zahl



# ZAHLENMENGEN

$\mathbb{N} \rightarrow$  Natürliche Zahlen  $\{1; 2; 3 \dots\}$

$\mathbb{Z} \rightarrow$  Ganze Zahlen  $\{\dots -2; -1; 0; 1; 2 \dots\}$

$\mathbb{Q} \rightarrow$  Rationale Zahlen  $\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

*Endliche Nachkommastellen, Periode*

$\mathbb{R} \rightarrow$  Reelle Zahlen  $\{\pi; e; \sqrt{2}; \dots\}$

*Unendliche Nachkommastellen*

$\mathbb{C} \rightarrow$  Komplexe Zahlen  $z = a + b \cdot i \wedge i = \sqrt{-1}$

# KARTESISCHES PRODUKT

Das kartesische Produkt wird mittels Kreuzprodukt aus beliebigen Mengen gebildet, wobei jedes Objekt der linken Menge mit jedem weiteren Objekt übrigen Mengen kombiniert wird.

Als Ergebnis entsteht ein n-dimensionales Tupel  $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ .

Die entstehende geordnete Punktmenge ist **nicht kommutativ**.

Der Euklidische Vektorraum lässt sich als kartesische Produkt somit wie folgt darstellen:  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = (x_1, x_2, x_3)$

Beispiel:  $A = \{a; b; c\}$      $B = \{1; 2;\}$

$$A \times B = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2); (c, 1); (c, 2);\}$$
$$B \times A = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c);\}$$



# GESETZE / ZUSAMMENHÄNGE

Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan:	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
Komplement:	$\bar{A} \cap A = \{ \}$	$\bar{A} \cup A = \Omega$
Absorption:	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

Zusammenhänge zwischen  $A; \{ \}; \Omega$

$$\cap: \quad A \cap A = A \quad A \cap \Omega = A \quad A \cap \{ \} = \{ \}$$

$$\cup: \quad A \cup A = A \quad A \cup \Omega = \Omega \quad A \cup \{ \} = A$$

Neutrales Objekt:  $A \cap \Omega = A \quad A \cup \{ \} = A$

# AUFGABEN

Beweisen Sie die folgenden Ausdrücke unter Benennung aller angewandten Gesetze

1) Das Absorptionsgesetz  $A \cap (A \cup B) = A$

2) Veranschaulichen Sie das De Morgangesetz  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  in einem Vennschen Diagramm

3) Vereinfachen Sie die Robbinsgleichung:  $\overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup B}}$

# KLASSENEINTEILUNG / ZERLEGUNG

Man spricht von einer Klasseneinteilung, sofern sicher gestellt werden kann, dass jedem Objekt aus der definierten Welt einer Klasse (Untermenge) zugeordnet werden kann.

## UND-Verknüpfung:

Die UND-Verbindung zwischen jeder Klasse muss jeweils die leer Menge als Lösung haben. Man spricht dann von **disjunkten Mengen**.

## ODER-Verknüpfung:

Die ODER-Verbindung zwischen allen Klassen muss zu einer Menge führen, die **alle Objekte** der definierten Ausgangsmenge enthält.

## Beispiel:

*Alphabet*

## UND-Verknüpfung:

$$\textit{Konsonat} \cap \textit{Vokal} = \{ \}$$

## ODER-Verknüpfung:

$$\textit{Konsonat} \cup \textit{Vokal} = \textit{Alphabet}$$

# POTENZMENGE

Eine Potenzmenge ist eine Ansammlung von allen möglichen Teilmengen basierend auf einer beliebigen Menge  $A$ .

Da jedes Objekt der Ausgangsmenge zwei Möglichkeiten besitzt, nämlich zu der Teilmenge zu gehören oder nicht, besteht jede Potenzmenge aus  $2^n$  Untermengen.

Die Teilmengen existieren von der Länge Null (leere Menge) bis zu der Länge  $n$  (Anzahl der Objekte in der Ausgangsmenge).

Beispiel:  $A = \{a; b; c; d\}$

$$P(A) = \left\{ \begin{array}{l} \{ \}; \\ \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \\ \{a; b\}; \{a; c\}; \{a; d\}; \{b; c\}; \{b; d\}; \{c; d\}; \\ \{a; b; c\}; \{a; b; d\}; \{a; c; d\}; \{b; c; d\}; \\ \{a; b; c; d\} \end{array} \right\} 2^n = 2^4 = 16 \text{ Untermengen}$$

# AUFGABEN

1) Welche der folgenden Aussagen über eine Potenzmenge  $P(A)$  und einer Menge  $A$  sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

$$\begin{array}{llll} a) A \in P(A) & b) A \subset P(A) & c) \{ \} \in P(A) & d) \{ \} \subset P(A) \\ e) \{A\} \in P(A) & f) \{A\} \subset P(A) & g) \{ \{ \} \} \subset P(A) & h) \{ \{ \} \} \in P(A) \end{array}$$

2) Bilden Sie die Potenzmenge basierend auf der Menge  $A = \{\nabla; \infty; \pi\}$  .

3) Gegeben sind die Menge A der natürlichen Zahlen (größer 7 und kleiner gleich 22), die durch 2 oder 3 oder durch 5 teilbar sind und die Menge B der nicht durch zwei teilbare Zahlen im Intervall von ]6; 24].

Bestimmen Sie die Lösungen (2-mal Aufzählung und 2-mal Eigenschaften):

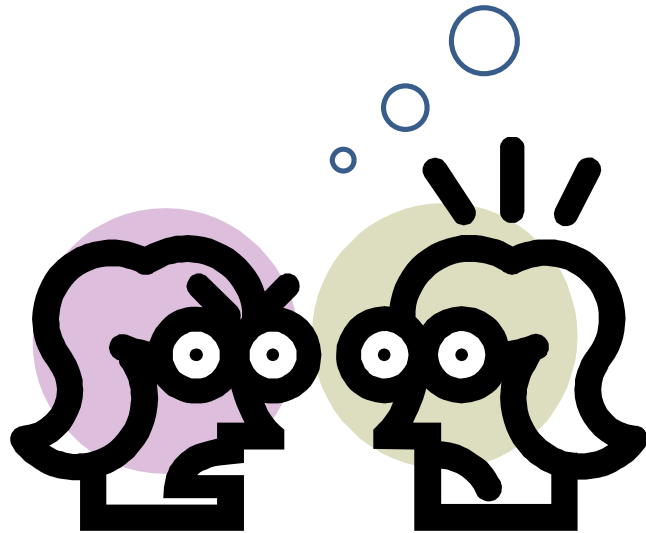
$$a) A \cap B \qquad b) A \cup B \qquad c) A \setminus B \qquad d) B \setminus A$$

4) Definieren Sie die natürlichen Zahlen größer gleich vier und kleiner 50, die durch 4 und durch 7 teilbar sind.

5) Gegeben sei die Menge M aller Studierenden an der Hochschule Fulda in Form der Matrikelnummer. Gesucht ist die Menge der Studierenden, wo die Quersumme der Matrikelnummer größer 15 ist.

# ARITHMETIK

Die Klammer sprach: „Zuerst komm ich,  
Gefolgt vom Punkt und dann der Strich“



# BRUCHRECHNUNG I

KgV: Kleinste gemeinsame Vielfache

Hier versucht man durch Primfaktorenzerlegung eine Zahl zu finden, die durch die gegebenen Zahlen teilbar sind.

Dies benötigen Sie um Brüche **gleichnamig** zu machen.

$$\frac{5}{56} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{5 \cdot (3 \cdot 5)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{75}{840}$$

$$\frac{11}{60} = \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{11 \cdot (2 \cdot 7)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{154}{840}$$

ggT: größter gemeinsamer Teiler:

Auch hier wird durch die Primzahlen eine Zahl gesucht. Nur diesmal müssen die gegebenen Zahlen durch das Produkt daraus teilbar sein.

Diese Methode wenden wir beim **Kürzen** an.

$$\frac{660}{1848} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}$$

# BRUCHRECHNUNG II

## Hauptnenner:

Damit Brüche addiert bzw. subtrahiert werden können, müssen diese im ersten Schritt auf den gleichen Nenner (Hauptnenner) gebracht werden, um abschließend die Zähler zusammen zu fassen.

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{5}{8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{8} + \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{12} - \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{3} = \frac{16 + 36 - 15}{24} = \frac{37}{24}$$

## Doppelbruch:

Bei einem Doppelbruch handelt es sich im Grunde genommen um eine Division von zwei Bruchtermen. Zur Berechnung werden der Zähler / Nenner im ersten Schritt in einen reinen Bruch umgewandelt und abschließend wird der Zähler mit dem Kehrwert des Nenners multipliziert.

$$\frac{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}}{\frac{1}{9} + \frac{4}{6}} = \frac{\frac{12 - 10}{15}}{\frac{2 + 12}{18}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{14}{18}} = \frac{2}{15} \cdot \frac{18}{14} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{6}{35}$$



# BRUCHRECHNUNG III

Eine rationale, endliche Zahl wird in einen Bruch verwandelt, in dem man den Teil hinter dem Komma als separaten Bruch darstellt und diesen dann mit dem ganzen Teil der Zahl addiert.

$$8,375 = 8 + 0,375 = 8 + \frac{375}{1000} = 8 + \frac{3}{8} = 8\frac{3}{8} = \frac{67}{8}$$

Handelt es sich um eine periodische Zahl, so wird die Zahl vor der Periode getrennt und diese dann in einen Bruch verwandelt und mit dem Rest der Zahl addiert.

$$4,166666666 \dots = 4,1\bar{6} = 4,1 + 0,0\bar{6} = \frac{41}{10} + \frac{6}{90} = \frac{125}{30}$$

# AUFGABEN I

Kürzen Sie die Brüche soweit als möglich und geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl an?

$$\frac{48}{1188} \quad \text{b)} \quad \frac{312}{54} \quad \text{c)} \quad \frac{1688}{792}$$

Wandeln Sie die gegebenen Dezimalzahlen in einen Bruch um und kürzen diesen wenn möglich.

$$2,0\bar{5} \quad \text{b)} \quad 8,0\bar{12} \quad \text{c)} \quad 1,625$$

Bestimmen Sie das Ergebnis der Aufgaben, in dem Sie die Brüche erweitern und zusammenfassen.

$$\frac{2}{5} - \frac{5}{3} + \frac{7}{2} + 2 \quad \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{4}{3} + \frac{4}{5} \right) - \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \right) \quad \left( \frac{5}{2} + \frac{2}{3} \right) \div \left( 3 + \frac{7}{4} \right)$$

Fassen Sie den Doppelbruch soweit als möglich zusammen.

$$\frac{\frac{4}{7} - \frac{5}{6}}{\frac{9}{14} + \frac{5}{3}} \quad \frac{\frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{\frac{4}{5} - \frac{10}{13}} \quad \frac{\frac{2}{9} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}$$

# GESETZE

Kommutativgesetz:  $a + b = b + a$   $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz:  $a + (b + c) = (a + b) + c$   $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Distributivgesetz:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Neutrales Element:  $a \cdot 1 = a \rightarrow 1$   $a + 0 = a \rightarrow 0$

Inverses Element:  $a \cdot \frac{1}{a} = 1 \rightarrow \frac{1}{a}$   $a + (-a) = 0 \rightarrow (-a)$

Beispiel:  $3 \cdot (x - 4) - 2x \cdot (2 - x) + (x + 2) \cdot 2 \cdot (3 - x)$   
 $(3x - 12) + (-4x + 2x^2) + 2 \cdot (x^2 - 2x + 3x + 6)$   
 $3x - 12 + -4x + 2x^2 - 2x^2 + 2x + 12 = x$

# AUFGABEN

1)  $(b + a - (c - 3 - d + b - (a + c + (b - d))))$

2)  $16 - (3x + y - \frac{1}{2}z)(\frac{1}{2}z - 3x + y)$

3)  $x - (2 + (3 - y + z - (2 + x - (y - z))))$

4)  $42 - (\frac{2}{y} + 2x - z) \cdot (z - 2x + \frac{2}{y})$

5)  $-a + (3 - (b + 5 - (c - 2 + (a + b)))) - (c - 4)$

6)  $-2 \cdot (z - x) - (1 + 2(4 + y - (z + 2x))) - 3(y - 2x)$

7)  $-4a + 2 \cdot (a - (3 + b - 2 \cdot (a - 4b + 2)) - 3 \cdot (a - b)) + 12b$

# BINOMISCHE FORMELN I

1. Binom:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binom:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

## Methodik:

1. Quadrierung der linken Variablen
2. Das Doppelte von linker mal rechter Variablen
3. Quadrierung der rechter Variablen

Beispiel:

$$(2x - 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3y) + (-3y)^2$$

$$(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$$(-4x^3 + 2y^2)^2 = 16x^6 - 16x^3y^2 + 4y^4$$

# BINOMISCHE FORMELN II

3. Binom:  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Beispiel:

$$(-3x + 2y) \cdot (-3x - 2y) = 9x^2 + 6xy - 6xy - 4y^2$$

oder einfacher

$$(-3x + 2y) \cdot (-3x - 2y) = 9x^2 - 4y^2$$

Anwendungsbeispiele:

- Entfernen einer Wurzel aus einer Summe
- Entfernen des Imaginäranteils einer komplexen Zahl  
(konjugiert komplexe Zahl)

# AUFGABEN

1)  $(2y + \frac{1}{2}x)(x - 4y) - 8(\frac{1}{4}x + y)^2$

2)  $(2b - 3a)(3a - 2b) - (2a - b)^2$

3)  $\frac{5 - 2\sqrt{x}}{3 + \sqrt{2x}}$

4)  $\frac{2x + 5\sqrt{x-1}}{3\sqrt{x} - 7}$

machen Sie den Nenner rational

5)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{2x - 8}{3\sqrt{x} - 6} \right)$

# PASCAL'SCHE DREIECK I

Exponent ( $n$ )	$(a+b)^n$														
0				1											
1			1		1										
2			1		2		1								
3			1		3		3		1						
4			1		4		6		4		1				
5			1		5		10		10		5		1		
6			1		6		15		20		15		6		1

Elemente in der 7. Zeile:

Ganz links: 1

Nebenan: 7, denn  $1 + 6 = 7$

Nebenan: 21, denn  $6 + 15 = 21$

Nebenan: 35, denn  $15 + 20 = 35$

Somit ergibt sich für die 7. Zeile die folgende Struktur:

$$1 - 7 - 21 - 35 - 35 - 21 - 7 - 1$$



# PASCAL'SCHE DREIECK II

**Methode** des Pascall'schen Dreiecks:

1. Koeffizienten:

Sie gehen an die richtige Zeile des Pascall'schen Dreiecks und schreiben die Koeffizienten mit einem »+« versehen ab.

2. Linke Variable:

Jetzt nehmen Sie den linken Teil der Summe und notieren diesen **in Klammern** hinter die Koeffizienten des ersten Schritts. Anschließend schreiben Sie von **links** anfangend den **höchsten** Exponenten **minus eins** bis zum Exponenten Null über die linke Variable.

3. Rechte Variable:

Nun benutzen Sie den rechten Teil der Summe. Diesen Ausdruck schreiben Sie ebenfalls **in Klammern** hinter den Term aus Schritt zwei. Weil es ja die rechte Variable ist, fangen Sie jetzt auf der **rechten Seite** mit dem **höchsten** Exponenten an und enden auf der linken Seite mit der Null.

Schon sind Sie fertig und können den entstandenen Ausdruck berechnen und zusammenfassen.

# AUFGABEN I

a)  $(2x - 0,1y)^2$

b)  $(ax + 3y)^2$

c)  $(2x - 0,5xy)(0,5xy + 2x)$

d)  $\left(2cd - \frac{3}{c}d\right)^2$

e)  $\left(\frac{x}{4} + 2xy\right)^2$

f)  $\left(\frac{1}{3}x - 0,1y\right)\left(0,1y + \frac{1}{3}x\right)$

g)  $(2i - 1)^4; i = \sqrt{-1}$

h)  $(0,4i + 8)^5; i = \sqrt{-1}$

i)  $\left(\frac{1}{4}i - 0,2x\right)\left(0,2x + \frac{1}{4}i\right)$

1)  $3 \cdot \left(2y + \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x - 2y\right) - 4 \cdot \left(\frac{2}{y}x + 3y\right)^2$

2)  $(3b - ab)(3b + ba) - (a - 2b)^2$

3)  $\frac{3\sqrt{x} + 2}{1 + \sqrt{3x}}$

4)  $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{3x} - 4}$

} machen Sie den Nenner rational

5)  $\lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{2x + 6}{6 - 2\sqrt{3 - 2x}} \right)$

6)  $\lim_{x \rightarrow 6} \left( \frac{x^2 - 4x - 12}{2\sqrt{2x + 4} - 8} \right)$

# AUFGABEN II

1) Berechnen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Binomischen Formeln.

$$(2x - 4y)^2 \cdot (2y + x)^2$$
$$48 \cdot \left(0,5x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 - 8 \left(\frac{1}{4}x - 2y\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x + 2y\right)$$
$$12 \cdot \left(-\frac{2}{3} + 6x\right)^2 \cdot ((3 - 4x) - 2(5 - 2x))$$

2) Entfernen Sie den Wurzelterm aus dem Nenner.

$$\frac{x-2}{5-2 \cdot \sqrt{3x-5}} \quad \frac{\sqrt{x}}{3 \cdot \sqrt{2x} + \sqrt{4-x}}$$

3) Bestimmen Sie die Lösung der Aufgaben mit Hilfe des Pascall'schenDreiecks

$$(2x - y)^5 \left(-\frac{1}{2}x - 4\right)^4$$